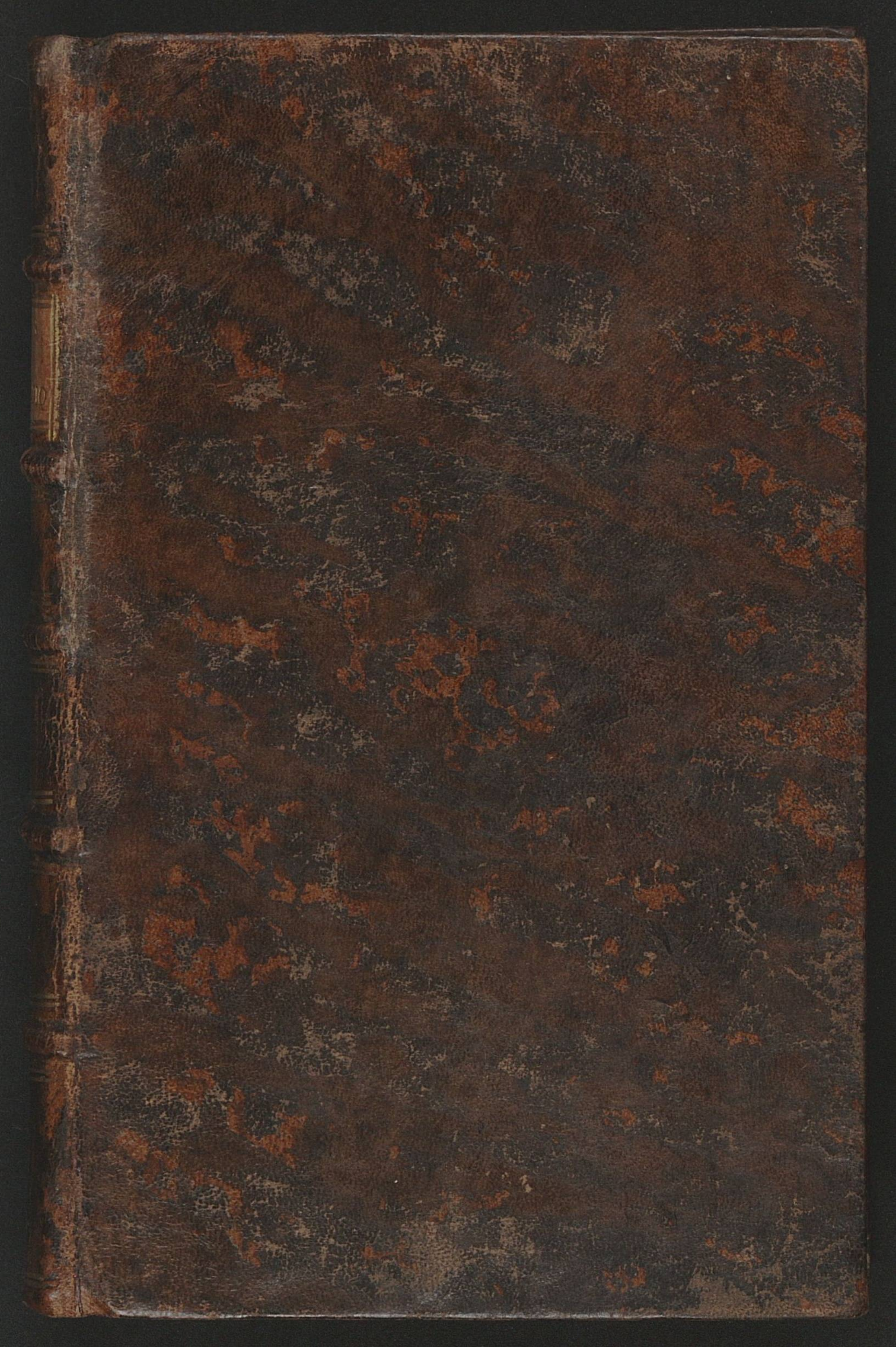


350

par François-Frédéric de Treytorrens (1688-1737) prof. de phil. à l'acad. de Laus. dès 1726.

cf sur lui: de Mullet, Diction. II p. 577.
Leu, Helvet. Lexicon.
Wolf, Biographien zur Naturgeschichte der Schweiz. II p. 66.

L'ouvrage est rare, parce que le fils de l'auteur a retiré tous les exemplaires qu'il a pu cf. Gindroz, Hist. de l'instruct. publ. dans le cant. de Vaud p. 447

Genath, de Bâle, qui a imprimé les 2 derniers opuscules composant ce volume, est venu en 1725 fonder une imprimerie à Yverdon. (cf. Crottet, Histoire et annales d'~~Yverdon p.~~ 432.)

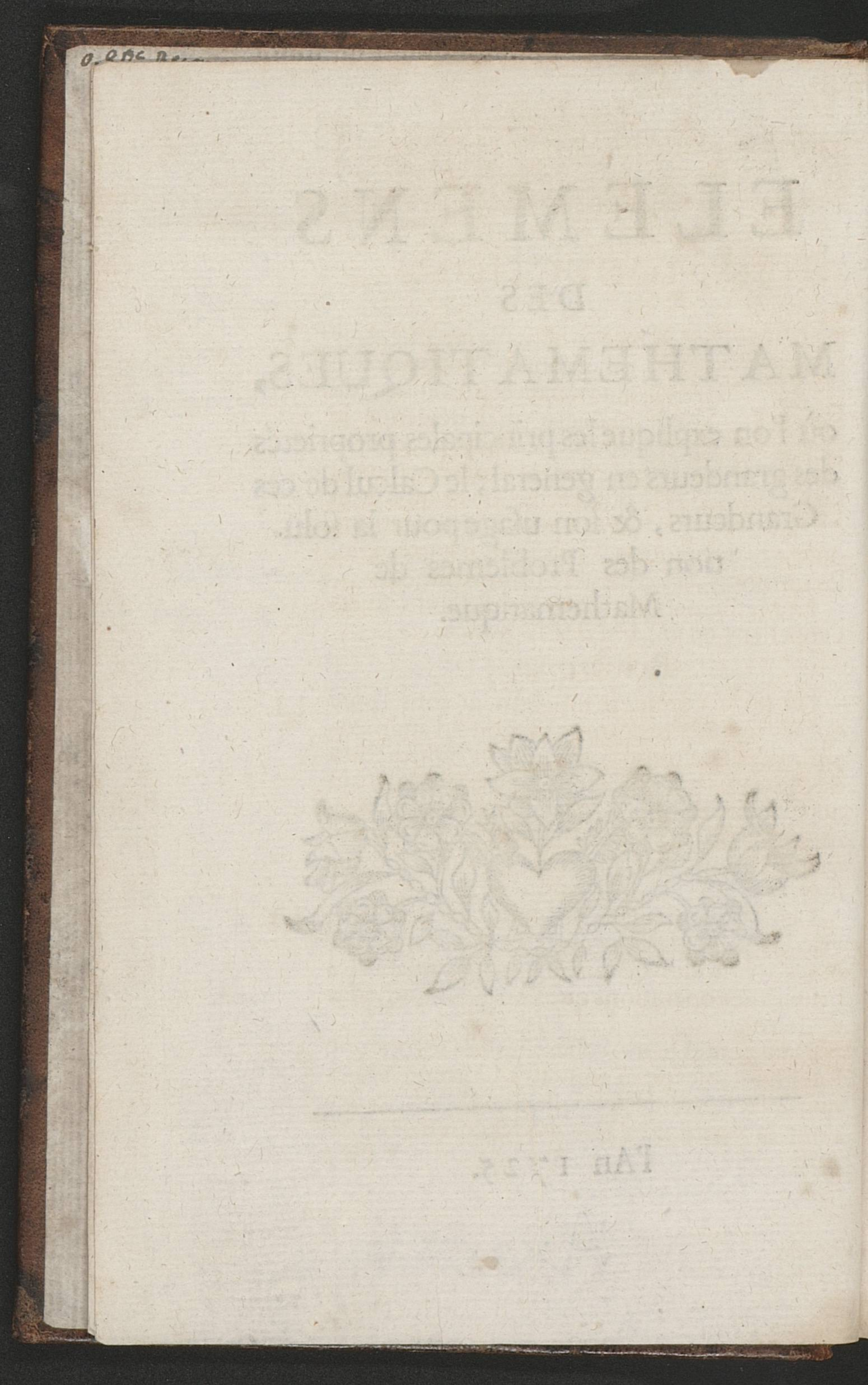
ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES,

où l'on explique les principales proprietés des grandeurs en general, le Calcul de ces Grandeurs, & son usage pour la solution des Problemes de Mathematique.



---

l'An 1725.





INTRODUCTION.



LES Mathematiques ont pour objet tout ce qui peut être augmenté & diminué, de maniere qu'il devienne le double, le triple, le quadruple &c, la moitié, le tiers, le quart &c, de ce qu'il étoit avant cette augmentation, ou cette diminution. Tels ſont, par exemple, les nombres, les corps, & le mouvement. I.

En Mathematique, tous ces differens ſujets s'appellent en général des *Grandeurs*.

Remarques.

On les y conſidere ſimplement ſous l'idée qui les repreſente comme capables d'augmentation & de diminution ; on fait abſtraction de toutes les qualités qu'ils peuvent avoir, qui ne ſont pas des ſuites neceſſaires de cette premiére. Ainſi l'on y enviſage les corps uniquement comme des ſubſtances étendues & finies. I I.

Les Mathematiciens s'appliquent à decouvrir les principales proprietés des grandeurs, & les methodes de faire ſur ces grandeurs les principales operations que l'on peut ſouhaiter de faire. I I

Dans toutes leurs recherches, ils ſe font une loi inviolable de n'admettre comme vraies que deux ſortes de propoſitions ; 1ò, celles dont la verité eſt d'une evidence inconteſta- I V.

 ble;

ble; 2o. celles qui sont des suites claires, & necessaires de ces premiéres.

Il est évident qu'avant que d'examiner des espèces particulieres de grandeurs, il faut examiner les grandeurs en général; C'est ce que je vai faire après avoir expliqué certains termes qui sont d'un usage continuel dans tous les ouvrages de Mathematique, & dont je me servirai dans celui-ci.

Definitions.

V. *Definition*; C'est l'explication de l'idée qu'on attache à un certain mot, ou à une certaine expression que l'on veut employer dans la suite.

VI. *Axiome*; Par ce mot on entend une Proposition dont la verité est d'une parfaite évidence.

VII. *Demande* ou *Supposition*; On donne ce nom à une Proposition qui n'est pas tout à fait aussi évidente qu'un Axiome, mais qui néanmoins est incontestable, & sur laquelle, par consequent, on peut bâtir sans crainte.

VIII. *Theorême*; C'est le nom qu'on donne à une Proposition qui n'est pas claire par elle même, & qu'il faut par conséquent démontrer.

IX. *Probleme*; On apelle ainsi l'énoncé d'une question qu'on propose à resoudre.

X. *Lemme*; C'est un Theorême, ou un Probleme, que l'on n'avance que pour s'en servir à démontrer ou à resoudre d'autres Propositions qui suivent.

XI. *Corollaire*; On donne ce nom aux Propositions qui decoulent comme d'elles mêmes, des Definitions, ou des Propositions aprés lesquelles on les met, & dont on dit qu'elles sont des Corollaires.

Remar-

Remarque.

La Methode la plus lumineuſe, & en même tems la plus courte qu'on puiſſe employer pour decouvrir les principales proprietés des Grandeurs en géneral, c'eſt d'y employer un certain calcul dont la ſuite de ce Cours fera beaucoup mieux connoitre & la nature & l'excellence que tout ce que j'en pourrois dire ici. Dans ce premier Traité, j'expliquerai donc, non ſeulement ces proprietés, mais encore le Calcul dont je viens de parler, & ſon uſage pour la ſolution des Problêmes de Mathematique. Lors qu'on l'aura lû avec attention, on verra facilement les raiſons qui m'ont engagé à traiter dans un même Ouvrage ces trois differens Sujets, & cela dans l'ordre que je vai ſuivre. XII.

LIVRE PREMIER.

Où l'on explique l'Addition & la Souſtraction des nombres entiers.

SECTION I.

Qui contient les principaux Axiomes ſur les Grandeurs en general.

AXIOMES.

Un Tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble. XIII.

Un Tout eſt plus grand qu'une de ſes parties. XIV.

XV. *Les grandeurs qui contiennent autant de fois l'une que l'autre, & sans reste, une même grandeur, ou des grandeurs égales, sont egales entr-elles.*

XVI. *Si à des Grandeurs égales on ajoute d'autres grandeurs égales, les sommes qu'on aura par ces additions seront égales.*

XVII. *Si de Grandeurs égales, on retranche d'autres Grandeurs égales, les restes seront égaux.*

XVIII. *Supposé que des Grandeurs soient inégales, & qu'on leur ajoute des Grandeurs égales, ces Grandeurs ainsi augmentées continueront d'être inégales, & les differences des unes aux autres seront les mêmes après ces additions qu'elles étoient auparavant.*

XIX. *Supposé que des Grandeurs soient inégales, & qu'on en retranche des Grandeurs égales, ces Grandeurs ainsi diminuées continueront d'être inégales, & les differences des unes aux autres seront les mêmes après ces retranchemens qu'elles étoient auparavant.*

Remarque.

Ces Axiomes. & les autres que je passe sous silence, se présenteront d'eux-mêmes à l'esprit dés qu'on en aura besoin ; Ainsi je ne les citerai que trés rarement.

SECTION II.
Où l'on explique l'Addition & la Soustraction des nombres entiers.

CHAPITRE I.
Qui contient les fondemens de ces Operations.

Definition.

I. X. La Partie des Mathematiques qui roule sur les nombres, porte le nom d'*Arithmetique*.

Remar-

Remarque.

L'Arithmetique, comme on le verra dans la ſuite, fait partie du Calcul des Grandeurs en général, que j'ai promis d'expliquer.

Definitions.

En Mathematique on donne le nom de *Nombre*, 1ò. à une ſeule unité, & à tous les aſſemblages poſſibles d'unités, c'eſt a dire à *un, deux, trois*, &c. 2ò. aux parties de l'unité, qui y ſont contenues pluſieurs fois exactement, comme *un demi*, *un tiers*, *un quart*, &c, & à tous les aſſemblages poſſibles de celles de ces parties qui y ſont compriſes aurant de fois l'une que l'autre, comme *deux tiers, cinq tiers, deux quarts, trois quarts*, &c. XXI.

Un nombre qui contient exactement une ou pluſieurs fois l'unité, s'apelle un nombre *entier*. Ainſi, *un, deux, trois, quatre*, &c, ſont des nombres entiers. XXII.

Un nombre qui contient exactement une ou pluſieurs fois une partie de l'unité, compriſe elle même dans l'unité pluſieurs fois ſans reſte, ſe nomme un nombre *rompu*, ou une *fraction*. *Un demi, deux demi, trois demi, un tiers, deux tiers, trois tiers, quatre tiers, &c*, ſont donc des fractions. XXIII.

Remarque.

Lors qu'un nombre rompu eſt égal à un nombre entier, comme celui-ci, *ſix tiers* qui eſt égal à *deux*, on ne lui donne le nom de nombre rompu, ou de fraction, qu'entant qu'on le conſidère comme formé de la même maniére que les nombres rompus qui n'égalent pas des nombres entiers.

Defi-

Definitions.

XXIV. On apelle une ſeule unité, *un*; une unité jointe à une autre unité, *deux*; deux & un, *trois*; trois & un, *quatre*, &c, neuf & un, *dix*, ou une *dixaine*; dix fois dix, *cent*, ou une *centaine*.

On nomme dix fois cent, *mille*, ou un *millier*; dix fois mille, ſimplement *dix mille*, ou une *dixaine de mille*; dix fois dix mille, ſimplement *cent mille* ou une *centaine de mille*. On nomme dix fois cent mille, *million*; &c. dix fois cent millions, *billion*; &c. dix fois cent billions, *trillion*, & ainſi de ſuite.

On exprime tous les autres nombres entiers par le moyen des précedens, dont ils ſont composés, comme on le va voir par les noms mêmes qu'on leur donne. Voici donc comment on les appelle, à les prendre de ſuite. *Dix & un*, ou pour abreger *onze*; *dix & deux*, ou pour abreger *douze*; &c. *deux dixaines* ou *vingt*; *vingt & un*; &c. *trois dixaines*, ou *trente* &c. *Cent & un*; *cent & deux*; &c. *trois cent*; &c. *mille & un*; *mille & deux*; &c.

XXV. On marque ainſi *un*, 1; *deux*, 2; *trois*, 3; *quatre*, 4; *cinq*, 5; *ſix*, 6; *ſept*, 7; *huit*, 8; *neuf*, 9.

Tous les autres nombres entiers ſe marquent par le moyen de ces neuf caracteres, qu'on apelle chifres, & de celui-ci, 0, qu'on nomme *zero*, & qui ſignifie *rien*; voici comment. On écrit en ligne droite ceux de ces neuf chifres qui expriment les nombres d'unités ſimples, de dixaines, de centaines; de mille, de dixaines de mille, de centaines de mille; de millions, &c, que le nombre qu'on veut marquer contient, ce qu'on connoit par le nom qui le deſigne. On met dans le premier rang à droite, celui qui exprime le nombre des ſimples unités; dans le ſecond celui

qui

qui exprime le nombre des dixaines, & ainsi de suite. S'il n'y a point de chifre à mettre dans quelque autre rang que le dernier, on écrit un zero dans ce rang là, tant pour marquer que le nombre qu'on veut exprimer, ne contient point de nombre convenable à ce rang, que pour conserver l'ordre des rangs qui suivent à gauche, & où je suppose qu'il faille placer des chiffres. On marquera donc ainsi le nombre *cent trente huit trillions, quarante billions, neuf cents quarante millions, trois cents soixante sept mille, huit cents quarante cinq,*

Trillions	Billions	Millions	Mille	
138	040	940	367	845

Corollaires.

Dix unités d'un rang quelconque sont égales à une unité du rang qui le suit immediatement à gauche, Ainsi dans le nombe 845, dix unités du rang que le chifre 5 occupe, valent une unité du suivant où l'on voit le chifre 4, qui est celui des dixaines. XXVI.

Cent unités d'un rang quelconque valent une unité du second rang qui le suit à gauche & ainsi de suite. XXVII.

Une unité d'un rang quelconque vaut dix unités du premier rang qui le suit à droite; cent du second; mille du troisieme, & ainsi de suite. XXVIII

Definition.

On marque ainsi une fraction, c'est a dire un nombre qui contient une ou plusieurs fois exactement une partie de l'unité, comprise elle-même dans l'unité plusieurs fois sans reste, on la marque, dis je, de cette maniere. On tire une ligne, & l'on met audessus le nombre qui exprime combien de fois la fraction contient cette partie, & au dessous, celui qui XXIX.

marque combien de fois cette même partie eſt contenue dans l'unité. Par exemple, on marque ainſi la fraction qui contient 7 fois la 12e partie de l'unité, $\frac{7}{12}$.

Le nombre qu'on met au deſſus de la ligne, s'apelle le *numerateur*, & celui qu'on met au deſſous, le *denominateur* de la fraction. Dans la fraction precedente $\frac{7}{12}$, 7 eſt dont le numerateur, & 12 le denominateur.

Avertiſſement.

On ne comprend ſous le nom de chifres que les neuf caracteres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; cependant je leur joindrai le zero, afin d'eviter par là toures les longueurs où cette diſtinction jette neceſſairement lors qu'on veut la ſuivre à la rigueur.

CHAPITRE II.

Où l'on explique l'Addition des nombres entiers.

Avertiſſement.

Pour pouvoir faire l'operation dont il s'agit dans ce Chapitre, il faut ſavoir ajouter enſemble autant de nombres entiers qu'on voudra, moindres chacun que 10.

Probleme.

XXX. *Ajouter enſemble pluſieurs nombres entiers.*

Exemple.

6 8 2 2 0 0 0
1 9 9 0 0 0 0
4 9 9 6 0 0 0

Somme, 1 3 8 0 8 0 0 0

Rem : Cet exemple ſufit pour faire decouvrir la regle generale qu'il faut ſuivre pour ajouter enſemble autant de nombres entiers qu'on voudra.

CHA-

CHAPITRE III.

Où l'on explique la ſouſtraction des nombres entiers.

Avertiſſement.

Pour pouvoir ſouſtraire un nombre entier, d'un autre nombre entier plus grand, il faut ſavoir ſouſtraire un nombre entier d'un autre plus grand que ce premier & moindre que 20.

Probleme.

Souſtraire un nombre entier donné d'un autre nombre plus grand. XXXI.

Exemple :

694640
67240

Reſte, 627400

SECTION III.

Où l'on explique l'Addition & la Souſtraction des grandeurs litterales entieres.

CHAPITRE I.

Où l'on poſe les fondemens de ces deux Operations.

Demande.

On peut deſigner une grandeur quelconque par une lettre de l'Alphabet, & en général par tel caractére qu'on voudra. Ainſi on peut mar- XXXII.

marquer le nombre 100, par *a*, ou par *b*, ou par *c*.

Definitions.

XXXIII Les grandeurs exprimées par des lettres, s'apellent des grandeurs *litterales*, ou *algebraïques*; & le calcul de ces Grandeurs porte le nom d'*Algebre*.

XXXIV Les Grandeurs réelles s'appellent des Grandeurs *positives*; les manques de grandeurs réelles se nomment des grandeurs *negatives*. Si, par exemple, un homme a 1000 Ecus, & qu'il ne doive rien, son bien est une grandeur positive. Si un homme n'a rien & qu'il doive 1000 Ecus, son manque de bien est une grandeur negative.

XXXV. Une grandeur réelle, & le manque d'une grandeur réelle égale à cette premiere grandeur, se nomment l'une par rapport à l'autre, des grandeurs *oposées*. Par exemple, le bien 1000 Ecus du premier homme, est la grandeur opposée de la dette 1000 Ecus du second; & reciproquement, la dette 1000 Ecus du second est la grandeur oposée du bien 1000 Ecus du premier.

Corollaire.

XXXVI *L'Assemblage de deux Grandeurs oposées est égal à zero*, c'est a dire, *que ces deux grandeurs étant jointes ensemble se détruisent l'une l'autre; reciproquement, si l'assemblage de deux Grandeurs est égal à zero, ces deux grandeurs sont les oposées l'une de l'autre.*

Definitions.

XXXVII. La marque + s'appelle *plus*, celle-ci — s'apelle *moins*; & quand on parle simplement de *signes*, c'est de ceux-là qu'on veut parler.

Pour marquer une grandeur *a* prise telle qu'el-

qu'elle est, on met le signe + devant cette grandeur *a*; c'est à dire, qu'on écrit + *a*. Suivant cette definition, si *a* represente le bien 1000 Ecus du premier homme, + *a* marque simplemenr ces 1000 Ecus : Si, au contraire, *a* represente la dette 1000 Ecus du second, + *a* marque encore simplement cette dette. XXXVIII

R: On sousentend le signe + devant les grandeurs qui ne sont précedées d'aucun signe.

Pour exprimer la grandeur oposée d'une grandeur *a*, on met le signe — devant cette grandeur *a*, c'est à dire, qu'on écrit —*a*. Ainsi, supose que *a* designe 1000 Ecus effectifs, —*a* exprime le manque de 1000 Ecus; Si, au contraire, *a* représente le manque de 1000 Ecus, —*a* représente 1000 Ecus effectifs. XXXIX.

Corollaires.

Si l'on change le signe d'une grandeur, on aura par ce changement une nouvelle grandeur qui sera l'oposée, de la premiere. XL.

Par exemple, si l'on change le signe + de + *a* on aura —*a* qui est l'oposée de + *a*. Pareillement si l'on change le signe — de —*a*, on aura + *a* qui est l'oposée de —*a*.

Definitions.

Pour représenter plusieurs grandeurs jointes ensemble, on les écrit de suite en tel ordre qu'on veut, chacune avec son signe. Par exemple, pour representer cellesci + *a*, —*b*, —*c*, on écrira + *a* — *b* — *c*. XLI.

Plusieurs Grandeurs jointes ensemble de la maniere que je viens de dire, comme + *a* — *b* — *c* forment une grandeur *complexe*, dont elles sont les *parties*. XLII.

Une

XLIII. Une grandeur qui n'eſt pas formée de pluſieurs grandeurs jointes enſemble de cette maniére, par exemple $+a$, $-a$, $+aab$, $-aabb$, eſt une grandeur *incomplexe*.

R: On verra dans le ſecond Livre quelles ſont les Grandeurs qu'on exprime par pluſieur lettres écrites toutes de ſuite; il ſufit ici de ſavoir que pluſieurs lettres ainſi écrites, ne marquent qu'une ſeule grandeur.

XLIV. Pour marquer le double d'une grandeur exprimée par une lettre, ou par pluſieurs écrites toutes de ſuite, on met devant cette lettre, où cet aſſemblage de lettres, le nombre 2; pour en marquer le triple, on met le nombre 3; pour en marquer les deux tiers on met la fraction $\frac{2}{3}$. &c. Par exemple, on marque ainſi le double de a, $2a$; celui de ab, $2ab$, les deux tiers de a, $\frac{2}{3}a$.

XLV. On donné le nom de Grandeurs *entieres* à deux ſortes de grandeurs, 1ò. Aux nombres enriers, & aux grandeurs exprimées par une lettre ſeule, ou précedée d'un nombre entier, ou par pluſieurs lettres écrites toutes de ſuite, ſeules, ou précedées d'un nombre entier: On donne ce nom, par exemple, aux grandeurs $+5$, -5, $+a$, $-a$, $+3a$, $-3a$, $+ab$, $-ab$, $+3ab$, $-3ab$. On le donne 2ò. aux grandeurs qui ſont formées de ces premiéres écrites de ſuite chacune avec ſon ſigne: telles ſont les ſuivantes, $+a-b$, $+2aa-3bb$.

R. Les premiéres grandeurs ſont donc des grandeurs entiéres incomplexes; & les ſecondes ſont des grandeurs entiéres complexes.

XLVI. Lorſque des grandeurs entiéres incomplexes, comme $+3aab$, $-aab$, ont le même nombre de lettres, & toutes les mêmes lettres l'une que l'autre, on dit qu'elles ſont *ſemblables*.

bles. Lorſqu'elles n'ont pas ces deux conditions, on dit qu'elles ſont *diſſemblables*.

CHAPITRE II.

De l'Addition des Grandeurs entieres litterales.

Remarque.

J'Ai pris juſques à préſent les mots d'*Addition*, de *Souſtraction*, de *Somme* & de *Reſte*, dans leur ſens ordinaire, ſens qui eſt aſſés clair, & aſſés connu pour n'avoir pas beſoin de définition. Mais en Algebre ils en ont un beaucoup plus étendu, dont celui-là n'eſt pour ainſi dire qu'une branche, & qu'il faut neceſſairement expliquer.

Definition.

Ajouter des Grandeurs, c'eſt en général les XLVII.
joindre enſemble, & trouver le reſultat de leur union ; ce reſultat s'apelle leur *ſomme*. Par exemple, ajouter $+4a$, $+5a$, $-2a$, c'eſt joindre enſemble ces trois grandeurs, & trouver ce qu'elles font étant ainſi jointes ; elles font $+7a$ qui eſt donc leur ſomme.

Probleme.

Ajouter pluſieurs grandeurs litterales entieres. XLVIII.

Exemples :

$+a$	$+a+5b-5c$
$+3b$	$+4d-6f-5g$
$-5c$	$+3m-5n$
Somme $+a+3b-5c$	$+a+5b-5c+4d-6f-5g+3m-5n$

Exemples.

$+4a-7b$	$+a$	$-a$
$+3c-5d$	$+4a$	$-4a$
$-4m$	$+5a$	$-5a$
Somme $+4a-7b+3c-5d-4m$	$+10a$	$-10a$

$+5a$	$+5a$	$+2a$	$+2a$
$+9a$	$+9a$	$+3a$	$+3a$
$-3a$	$-3a$	$+9a$	$+9a$
$-11a$	$-17a$	$-5a$	$-4b$
Somme 0	$-6a$	$+9a$	$+14a-4b$

$+3a+4b$
$+5a+9b$
$+9a-9b$
$-8a-5b$
Somme $+9a-b$

Corollaire.

XLIX. *Si l'on change les signes d'une grandeur complexe* $+a-b$, *on aura par ce changement une nouvelle grandeur* $-a+b$, *qui sera l'oposée de la premiere* $+a-b$. Il est évident que si l'on ajoute ces deux grandeurs, leur somme sera zero ; donc par l'article 36, elles sont les opposées l'une de l'autre.

Remarque.

L. En général, *si l'on change les signes d'une Grandeur quelconque, je veux dire d'une grandeur complexe, ou incomplexe, la grandeur qui naitra de ce changement, sera donc toujours l'opposée de la pre-*
*40&49 *miere.* *

CHA

CHAPITRE III.

De la Soustraction des grandeurs literales entieres.

Definition.

Soustrarie une grandeur a d'une autre b, c'est en général trouver celle qui étant ajoutée à la premiere a, fait une somme égale à la seconde b; & cette grandeur qu'il faut trouver, se nomme le *reste* de la Soustraction. Par exemple soustraire $+2b$ de $+5b$, c'est trouver $+3b$, car la somme $+2b+3b$ est égale à $+5b$; ainsi $+3b$ est le reste de cette soustraction. Pareillement, soustraire $-2b$ de $+5b$, c'est trouver $+7b$, car la somme $-2b+7b$ est égale à $+5b$. LI.

Probleme.

Soustraire une grandeur literale entiere d'une autre grandeur literale entiere. LII.

Exemples.

$+a$	$-a$	$-a+b$	$+3a$	$+3a$
$+b$	$+b-c$	$+c-d$	$+2a$	$+5a$
$+a-b$	$-a-b+c$	$-a+b-c+d$	$+a$	$-2a$

$-7a$	$-4a+6b-8c$
$-9a$	$+a-5b+7c$
$+2a$	$-5a+11b-15c$

Fin du premier Livre.

LIVRE SECOND.

Des Raiſons & des Proportions Géometriques.

SECTION I.

Où aprés les avoir definies, l'on établit leurs premiéres proprietés.

CHAPITRE I.

Qui contient ces Definitions.

Definitions.

LIII. Contenir *exactement*, c'eſt contenir une ou pluſieurs fois ſans reſte. Exemple, 6 contient exactement 3.

LIV. Une grandeur, comme 3, qui eſt contenue exactement dans une autre, 6, s'apelle une *partie aliquote* ou une *meſure* de cette grandeur 6.

LV. Des grandeurs, comme 3, & 4, qui ſont contenues exactement le même nombre de fois dans d'autres grandeurs, 6 & 8, chacune dans ſa correſpondante, en ſont des parties aliquotes, ou des meſures *pareilles*.

LVI. Lors qu'une grandeur, comme 2, eſt contenue exactement dans chacune de pluſieurs autres grandeurs, 4, 6, 8, elle porte le nom de partie aliquote commune, ou de *commune meſure* de ces grandeurs, 4, 6, 8.

LVII. Les grandeurs qui ont quelque commune meſure, s'apellent des grandeurs *commenſurables*;

bles; celles qui n'en ont aucune, ſe nomment des grandeurs *incommenſurables*.

Av: On verra dans le 4me Livre, qu'il y a des grandeurs de cette derniere ſorte.

Demande.

Une grandeur p *qui eſt indefiniment petite par raport à une autre grandeur* a, *je veux dire qui eſt plus petite que quelque partie de cette grandeur* a *qu'on entreprenne d'aſſigner, peut être conſiderée comme une partie aliquote de cette grandeur* a. LVIII.

Corollaire.

Une grandeur p *indefiniment petite par raport à chacune de pluſieurs autres grandeurs* a, b, c, *peut être conſiderée comme une partie aliquote commune de ces grandeurs* a, b, c. LIX.

Avertiſſement.

Lors qu'on ſuppoſera que des grandeurs *a, b, c* qui pourroient être incommenſurables, ont une commune meſure, on entendra toujours par cette commune meſure uue grandeur *p* indefiniment petite par rapport à chacune de ces grandeurs *a, b, c*.

Definitions.

Le *raport*, ou la *raiſon*, d'une grandeur *a* à une autre *b*, c'eſt en général ce que la premiere *a* eſt à l'égard de la ſeconde *b*, LX.

Rem. On ne le decouvre qu'en comparant celle là *a* avec celle ci *b*.

LXI. La grandeur *a* que l'on compare eſt *l'antecedent*, ou, le *premier terme*, & de la comparaiſon, & du raport ; La grandeur *b* à laquelle on la compare, en eſt le *conſequent*, ou le *ſecond terme*,

LXII. Lorſque des grandeurs, ſont toutes poſitives, ou negatives, elles ſont *du même ordre ;* Lorſque les unes ſont poſitives pendant que les autres ſont negatives, elles ſont *de diférens ordres*.

LXIII. Le *raport Géometrique* d'une grandeur *a*, à une autre *b*, conſiſte en ce que l'antecedent *a* contient exactement un certain nombre de fois une certaine partie aliquote du conſequent *b*, s'ils ſont du même ordre ; où de la grandeur opoſée de ce conſequent *b*, s'ils ſont de diferens ordres. Exemple, le raport géometrique de $+10$ à $+15$ conſiſte en ce que $+10$ contient deuxfois le tiers $+5$ de $+15$. Celui de $+10$ à -15 conſiſte en ce que $+10$ contient deux fois le tiers $+5$ de la grandeur opoſée de -15, laquelle eſt $+15$.

LXIV. Lorſque des antecedens contiennent exactement le même nombre de fois des parties aliquotes pareilles de leurs conſequens, ou des grandeurs opoſées, les raports géometriques de ces antecedens à leurs conſequens ſont *égaux*. Ex: Le raport géometrique de $+10$ à $+15$ eſt égal à celui de $+2$ à $+3$; Celui de $+10$ à -15 eſt égal à celu de $+2$ à -3. de même qu'à celui de -2 à $+3$.

LXV. Lorſque des antecedens *a*, ont les mêmes raports avec leurs conſequens *b, d*, ces grandeurs, *a, b; c, d* rangées comme on les voit ici, c'eſt à dire, de maniére que chaque antecedent précede ſon conſequent, ſont en *proportion*. où, ſont *proportionelles*.

Si les raports ſont des raports géometriques, les

les grandeurs *a, b; c, d* ſont en proportion *géometrique*, ou ſont *géometriquement proportionelles;* & l'on marque ainſi l'égalité de ces raports *a. b : : c. d*, ce qui ſignifie donc que les raports géometriques de *a* à *b* & de *c* à *d* ſont égaux. On exprime encore cette égalité de pluſieurs autres maniéres dont voici les principales; *a* eſt à *b*, comme *c* eſt à *d*; les grandeurs *a, b* ſont entr'elles comme les grandeurs *c, d*. LXVI.

Avertiſſement.

Dans la ſuite, quand je parlerai de raiſons, ou de proportions, ſans ajouter rien qui en determine l'eſpèce, où qui marque que je prens ces mots dans toute leur étenduë, ce ſera toujours des raiſons où des proportions *géometriques* que je voudrai parler.

CHAPITRE II.

Où l'on établit les premiéres proprietés des Proportions Géometriques,

Avertiſſement.

Dans ce Chapitre, je prens pour exemple de raports égaux, ceux de 2*a* à 3*a*. & de 2*b* à 3*b*; c'eſt à dire, ceux dont les antecédens contiennent deux fois les tiers de leurs conſequens. On verra ſans peine que tout ce que je démontre de ces ſortes particuliéres de raports égaux, s'étend à toutes les autres.

Corollaires de la Définition des raports égaux.

Les antecedens des raports égaux, ſont tous, ou LXVII.

des mêmes ordres que leurs consequens, ou de differens ordres. Car s'ils contiennent, par exemple, deux fois les tiers de leurs consequens, ils sont des mêmes ordres que ces consequens, & s'ils contiennent deux fois les tiers des grandeurs oposées de leurs consequens, ils sont de diférens ordres.

LXVIII *Suposé que quatre grandeurs, comme* $+2a, +3a, +2b, +3b$, *soient en proportion; si l'on change les signes de deux quelconques de ces quatre grandeurs, la proportion aura toujours lieu.*

$+2a . +3a :: +2b . +3b$, donc

$$\left\{\begin{array}{l} -2a . -3a :: +2b . +3b \\ -2a . +3a :: -2b . +3b \\ +2a . -3a :: +2b . -3b \\ +2a . -3a :: -2b . +3b \end{array}\right.$$

LXIX. *Suposé que plusieurs grandeurs comme* $+2a, +3a; +2b, +3b$, *soient en proportion, la somme des antecedens est à la somme des consequens, comme un antecedent est à son consequent.*

$2a . 3a :: 2b . 3b$, donc
$2a + 2b . 3a + 3b :: 2a . 3a$.

LXX. *Si deux gr: sont doubles ou triples ou quadruples &c, de deux autres gr:* a, b, *chacune de sa correspondante, elles sont entr'elles comme ces grandeurs* a, b.

Par ex: $2a . 2b :: a . b$.

Car $a . b :: a . b$; donc,

69 $a + a . b + b :: a . b$, c'est à dire, $2a . 2b :: a . b$

LXXI. *Lorsque quatre gr: par ex:* 2a. 3a; 2b, 3b, *sont en proportion, le premier antecedent est au second antecedent, comme le premier consequent est au second consequent.*

$2a . 3a :: 2b . 3b$; donc *alternando*, c'est ainsi qu'on
$2a . 2b :: 3a . 3b$. parle d'ordinaire lors qu'on fait ce changement,

Car

Car $2a. 2b :: a. b$,* & *70

$3a. 3b :: a. b$. Ainsi suposé que les antecédens a, a contiennent quatre fois les 5mes. parties de leurs consequens b, b, il faut que les antecedens $2a$, $3a$ contiennent aussi deux fois les 5mes, parties de leurs consequens $2b$, $3b$.

Lorsque quatre grandeurs comme 2a, 3a :: $2b$, $3b$ *sont en proportion, si les antecedens, ou les consequens sont ègaux, les autres gr: sont pareillement égales.* LXXII.

$2a. 3a :: 2b. 3b$; donc, si $3a = 3b$,
$2a = 2b$

Rem: On peut tirer ce Corollaire du précedent, & c'est pour cela que je l'ai mis après ce Corollaire.

Suposé que quatre gr:, par ex: 2a, 3a; 2b, 3b, *soient en proportion, le premier consequent est à son antecedent, comme le second consequent est à son antecedent.* LXXIII

$2a. 3a :: 2b. 3b$; donc, *invertendo*,
$3a. 2a :: 3b. 2b$..

Si quatre gr: par ex: 2a, 3a; 2b, 3b *sont en proportion, la somme des deux premiérs termes est au second, comme la somme des deux derniers termes est au dernier.* LXXIV

$2a. 3a :: 2b. 3b$; donc, *componendo*,
$5a. 3a :: 5b. 3b$.

Suposé que quatre gr:, comme 2a, 3a; 2b, 3b, *soient en proportion, si l'on soustrait les antecedens des consequens, où les consequens des antecedens, on aura deux restes dont le premier sera au premier consequent, comme le second au second consequent.* LXXV.

2a.

$2a.\ 3a :: 2b.\ 3b$; donc *dividendo*
$a.\ 3a :: b.\ 3b$, ou
$-a.\ 3a :: -b.\ 3b$.

Definitions.

LXXVI Pour marquer qu'une grandeur *a* est égale à une autre gr: *b*, on écrit $a = b$, ce qui signifie donc, *a* est égal à *b*, & l'on apelle cette marque $=$, le *signe d'égalité*.

Theorême.

LXXVII. *Suposé que quatre gr: comme* 2a, 3a; 2b. 3b, *soient en proportion, c'est à dire, que les antecedens* 2a, 2b, *contïennent exactement le même nombre de fois de certaines parties aliquotes pareilles de leurs consequens* 3a, 3b, *ou des gr: oposées, comme ici deux fois les tiers de leurs consequens; ils contiennent autant de fois l'un que l'autre telles autres parties aliquotes pareilles des mêmes consequens* 3a, 3b, *ou des grandeurs oposées, qu'on voudra choisir, par exemple, les* 5mes.

$2a.\ 3a :: 2b.\ 3b$; & il faut prouver que les antecedens $2a$, $2b$ contiennent le même nombre de fois les 5mes. parties de leurs consequens $3a$, $3b$.

Que la 5me. partie de *a* soit nommée *m*, & celle de *b*, *n*.

Premiérement, $a = 5m$, & $b = 5n$; par consequent les quatre grandeurs en question peuvent être exprimées ainsi,

2 fois $5m$. 3 fois $5m$ :: 2 fois $5n$. 3 fois $5n$, c'est à dire,

$10m.\ 15m :: 10n.\ 15n$

En second lieu, il est clair que la 5me partie de

15m est 3m, & que celle de 15n est 3n: Car 15m = 3 fois 5m = 5m + 5m + 5m, dont la 5me. partie est $m + m + m = 3m$; Pareillement, 15n = 3 fois 5n = 5n + 5n + 5n dont la 5me. partie est $n + n + n = 3n$. Or il est bien évident que 10m contient autant de fois 3m, que 10n contient 3n.

Corollaire.

Soient deux proportions, chacune de quatre termes, a.b :: c. d, e. f :: g. h. Si l'un des antecedens de la premiere est à son consequent, comme l'un des antecedens de la seconde est au sien; l'autre antecedent de la premiere est aussi à son consequent, comme l'autre antecedent de la seconde est au sien. LXXVIII

a.b :: c.d,

e.f :: g. h; donc si *c. d :: g, h, a.b :: e. f.*

Car supofé, par ex: que les antecedens *c, g* des deux proportions dont il s'agit, contiennent exactement deux fois les tiers de leurs consequens *d, h*, il faut que les deux autres antecedens *a, e*, des deux mêmes proportions, contiennent aussi deux fois sans reste les tiers de leurs consequens *b, f.** *77.

Definition.

Soient d'une part plusieurs gr: de suite A, B, C, D, E, & d'une autre part autant d'autres gr: aussi de suite *a, b, c. d, e.* Si la premiere A de celles là est à la seconde B, comme la premiere *a* de celles ci, est à la seconde *b*; que la seconde B de celles là soit à la troisieme C, comme la seconde *b* de celles-ci est à la troisieme *c*, & ainsi du reste: on dit que les premieres gr: A,B,C,D,E, & les secondes *a, b, c, d, e,* LXXIX

ſont *proportionelles* les unes aux autres ; & l'on marque ainſi cette proportion A.B.C.D.E :: *a.b,c.d.e.* ce qui ſignifie donc, A eſt à B, comme *a* eſt à *b*; B eſt à C, comme *b* eſt à *c*, &c.

Theoreme.

LXXX. *Supoſé que pluſieurs gr:* A, B, C, D, E *ſoient proportionelles à d'autres gr, a, b, c, d, e, je veux dire qu'elles ſoient telles que* A.B.C.D.E :: a.b.c.d.e: *quelles qu'on prenne entre les premieres, elles ſeront proportionnelles à leurs correſpondantes d'entre les ſecondes, par ex:* A. C. E :: a. c. e.

A.B.C.D.E ::a.b.c.d.e, & il faut demontrer que *A. C. E. :: a.c.e.*

Ayant imaginé une partie aliquote *m* commune aux gr: *a,b,c,d,e,* & ſupoſé, par ex:. que *a* la contiene 2 fois ;*b*, 3 fois ; *c*,5 fois ; *d*,8 fois; *e*,10 fois , on exprimera de cette maniere la proportion dont il s'agit

A.B.C.D.E :: 2*m*. 3*m*. 5*m*. 8*m*.10*m*:

Maintenant ſi l'on apelle la 10me. partie de E, M, & qu'on faſſe attention aux rapports qu'on ſupoſe égaux , on verra que D contient
77. 8 fois M; C, 5 fois ; B, 3 fois ; A, 2 fois ; par conſequent qu'on peut exprimer ainſi la derniere proportion.

2M.3M.5M.8.M.10M :: 2*m*.3*m*.5*m*.8*m*.10*m*.
Maintenant il eſt clair que
2M. 5M. 10M :: 2*m*.5*m*.10*m*, ce qu'il falloit demontrer.

SECTION II.

Où l'on explique la Multiplication des grandeurs entieres, & les proprietés des raports, qui dépendent de cette operation.

CHAPITRE I.

De la Multiplication des nombres entiers.

Definition.

LOrſque dans une même eſpèce de grandeurs différentes des nombres, on en prend à diſcretion une poſitive, & que l'on ſe repréſente les autres par les raports qu'elles ont avec celle là, comme on ſe repreſente les nombres par les raports qu'ils ont avec l'unité; on apelle cette grandeur poſitive, *l'unité* des grandeurs de cette eſpèce, & on la marque par le chifre 1, de même que l'unité numerique. Supoſé, par exemple, qu'entre les longueurs on choiſiſſe celle qui porte le nom de pied de Roi, elle ſera l'unité des longueurs. LXXXI

Multiplier une gr: *a* par une autre *b*, c'eſt trouver la gr: qui eſt à la premiere *a*, comme la ſeconde *b* eſt à l'unité. lxxxii.

On nomme cette premiere gr: *a*, *le multiplié*, en ſous-entendant le mot de *terme*; la ſeconde *b*, le *multiplicaseur*; & celle qu'il faut trouver, le *produit* de la multiplication.

Exemples. Multiplier 6 par 2, c'eſt trouver le nombre qui eſt a 6 comme 2 eſt a 1; nom-

bre qui est donc 12: Car 12.6::2.1. Dans cet exemple, 6, est le multiplié; 2, le multiplicateur; & 12, le produit. Pareillement, multiplier 6 par $\frac{2}{3}$, c'est trouver le nombre qui est à 6 comme $\frac{2}{3}$ est à 1; ainsi ce nombre est 4: car 4.6::$\frac{2}{3}$.1.

Remarque.

Pour pouvoir multiplier un nombre entier quelconque par une autre, il faut savoir multiplier tout nombre entier moindre que 10, par un autre aussi moindre que 10; par exem: 9 par 8.

Probleme.

LXXXIII. *Multiplier un nombre entier par un autre.*

Exemples.

```
39025      34      34     34
    2      10     100     20
-----     ---    ----    ---
78050     340    3400    680

   34            367089
  200              2086
  ---          --------
 6800           2202534
               2936712 0
              734178000
             ----------
              765747654
```

CHAPITRE II.

Où l'on établit les fondemens de la multiplication des grandeurs literales entieres, & les proprietés des raports, qui dépendent de cette operation.

Defi-

Definition.

On marque de ce s deux maniéres le pro- LXXXIV.
duit d'une gr: *a* multipliée par une autre *b*, *ab*, ou *aXb*; mais ordinairement on n'emploie la derniere que lorſque la premiere ſeroit equivoque. Par exemple, au lieu de marquer ainſi le produit de $+m+n$ multipliée par $+p+r$, $m+n+p+r$ ce qui exprimeroit la ſomme de ces deux grandeurs, on le marquera de cette maniere $\overline{+m+n}X\overline{+p+r}$.

Theoreme.

Quelle de deux grandeurs a, b *qu'on multiplie par* LXXXV.
l'autre, on aura toujours le même produit.

Il faut demontrer que . . .

$ab = ba$.

Premietement, par la nature de la multiplication,

$ab.a :: b.1$; donc, alternando,

$ab.b :: a.1$. En ſecond lieu, la nature de la multiplication donne encor,

$ba.b :: a.1$. Or les deux derniers termes de la proportion précedente étant les mêmes que ceux de celle-ci, il s'enſuit évidemment que, . . .

$ab.b :: ba.b$* par conſequent que, *78

$ab = ba$*, ce qu'il falloit demontrer. *72.

Avertiſſement.

En conſequence de ce Theoreme, on apellera le produit d'une grandeur *a* multipliée par une autre *b* ſimplement le produit de ces deux gr: *a*, *b*; & on l'exprimera indiféremment de cette maniere, *ab*, ou de celle ci *ba*.

Corollaire.

lxxxvi. *Le produit* ab *de deux gr:* a, b, *eſt à chacune d'elles comme l'autre eſt à l'unité ; par ex:* ab.b : : a.1. Car *ab* peut être conſideré comme le produit de *b* multiplié par *a;* & dans ce cas *ab.b :: a.*1, par la nature de la multiplication.

Theorême.

lxxxvii *Si l'on multiplie deux gr:* a, b *par une même gr:* m, *les produits qu'on trouvera*, am, bm, *ſeront proportionnels à ces deux grandeurs* a, b.

Il faut prouver que. . . .

am. bm. : : a, b.

Premiérement, par la nature de la multiplication,

*am. a : : m.*1, &

*bm.b : : m,*1; par conſequent,

*78. *am. a : : bm. b;** donc, alternando,

am. bm :: a. b, ce qu'il falloit demontrer.

Corollaire.

lxxxviii *Soit une proportion* a. b :: c. d. *Si l'on en multiplie un antecedent, & ſon conſequent, par ex:* a, & b, *par une même grandeur* m, *la proportion aura toujours lieu, jé veux dire que* am, bm :: c. d.

a. b : : c, d, d'ou je conclus que,

am. bm : : c. d; & en voici la raiſon.

Si les antecedens *a, c* de la proportion ſupoſée contiennent, par exemple, deux fois les tiers de leurs conſequens *b, d,* il faut par le Theorême qu'on vient de voir, que *am* contiene pareillement deux fois le tiers de *bm*, puiſque *am. bm : : a. b*

De-

Definitions.

Dans une proportion quelconque compo- LXXXIX.
sée de quatre termes, le premier & le dernier s'apellent les *extremes* ; le second & le troisieme, les *moiens*,

Dans celle ci, par exemple, $2a . 3a :: 2b , 3b$, $2a$ & $3b$ sont les extremes ; $3a$ & $2b$ sont les moïens.

Theorême.

Le produit ad *des extremes d'une proportion géometrique composée de quatre termes* a. b : : c. d, *est* XC.
égal au produit b c *des moiens.*

$a . b :: c . d$, & il faut demontrer que

$ad = bc$.

Si l'on multiplie les deux premiers termes a, b de la proportion dont il s'agit, par d, on aura

$ad . bd :: c . d$;* & si l'on multiplie les deux der- *88.
niers termes c, d de cette proportion ci, par b, on aura en consequence du même article.

$ad . bd :: cb . db$. or

$bd = db$*; donc *85.

$ad = cb$*. *72.

Definition.

On dit que deux gr: a, d sont *reciproquement* XCI.
proportionelles à deux autres b, c, lorsque l'une de celles là a, d, par ex: a, est à l'une b de celles ci b, c, comme l'autre c de ces dernieres est à l'autre d des premieres ; en un mot, lorsque $a , b :: c . d$,

Theo-

Theorême.

XCII *Suposé que le produit* a d *de deux gr:* a, d *soit égal au produit* b c *de deux autres gr:* b, c; *les deux premieres* a, d *sont reciproquement proportionelles aux deux dernieres* b, c; c'est à dire, que *a.b :: c.d.*

ad == *bc*, & il faut prouver que
a.b : : c, d.

Soit entendue une gr: *x* telle que *x.b : : c.d*, cela posé, si l'on fait voir que *a*==*x*, il sera clair que *a.b : : c. d*; or voici la preuve de cette égalité.

x. b : : c. d, par la suposition; donc
*90. *xd*==*bc**. D'un autre coté,
ad==*bc*, aussi par la suposition; donc
ad==*xd*. Or . .
*88. *ad. xd : : a.x**; donc, puisque *ad*==*xd*
a==*x*, ce qu'il falloit demontrer.

Definition.

XCIII. *Multiplier plusieurs gr:* comme *a, b, c, d les unes par les autres*, c'est multiplier 1ò. l'une de ces gr: par ex: *a*, par l'une *b* des autres; 2ò. leur produit *ab*, par l'une *c* des gr: qui restent, & ainsi de suite jusques à ce qu'il n'en reste aucune. Le dernier produit qu'elles donnent, s'apelle le produit de ces grandeurs ainsi multipliées les unes par les autres; & on le marque de ces deux manieres *abcd*, $a \times b \times c \times d$.

Theorême.

XCIV. *En quelque ordre qu'on multiplie plusieurs grandeurs on aura toujours le même produit.*

1ò, Soient trois grandeurs *a, b, c*, je dis, par ex:, que
abc==*cba*, ce que je prouve ainsi.

ab.

ab.cb. : : *a.c**; donc en multipliant les moiens & les extremes, *87.

abc=*cba**. Tous les autres cas pour trois gr: se demontrent de la même maniere. *90.

2o, Soient quatre gr: *a,b,c,d*, je dis, par exemple, que
abcd=*dcba*, & je le prouve ainsi

abc=*bca*
dcb=*bcd* } par le cas précedent; donc

abcd=*bcad*
dcba=*bcda* } ainsi, il n'y a qu'à prouver que

bcad = *bcda* ; ce qui est clair, car
bca. bcd. : : *a.d**; donc *87.
bcad=*bcda**. Tous les autres cas se démontrent de la même maniére que celui ci. *90.

Avertissement.

En consequence de ce Theorême, on apellera le produit de plusieurs grandeurs *a, b, c, d* multipliées les unes par les autres en quelque ordre que ce soit, simplement le produit de ces grandeurs; & dans l'expression de ce produit on donnera à ces grandeurs *a, b, c, d*, l'ordre qu'on voudra.

Définitions.

Lorsque toutes les grandeurs dont on veut marquer le produit, ou qu'une partie sont égales, on abrege son expression de cette maniere. Au lieu, par ex:, de *aa* on écrit a^2; au lieu de *aaa*, a^3; au lieu de *aaabb*, a^3b^2; & ce nombre XCV.

 qu'on

qu'on met au haut de la gr: *a* ou *b*, s'apelle *l'exposant* de cette gr: *a* ou *b*.

XCVI. Une grandeur quelconque *a*, ou ce qui revient au même a^1, se nomme la *premiere puissance*, ou la *puissance du premier degré*, de cette grandeur *a*; le produit a^2 de cette gr: *a* multipliée par elle même, sa *seconde puissance*, ou sa *puissance du second degré*; le produit a^3 qui vient du produit precedent a^2 multiplié par cette même gr: *a*, sa *troisieme puissance*, ou sa *puissance du troisieme degré*, & ainsi de suite.

Le nombre qui marque le degré d'une puissance, s'apelle *l'exposant* de cette puissance. Ainsi 1, est l'exposant de la premiere puissance; 2, celui de la seconde; 3, celui de la troisieme, &c.

Theorême.

XCVII. *Si l'on multiplie le produit* abc *de plusieurs grandeurs, par le produit* df *de plusieurs autres, on aura le même produit qu'on trouveroit en multipliant toutes ces grandeurs* a, b, c, d, f, *les unes par les autres.*

Il faut prouver que

$\overline{abc} \times \overline{df} = abcdf$.

82. $abcd . abc :: d . 1$

$df . f :: d . 1$; Ainsi

78. $abcd . abc :: df , f$; par consequent

90. $\overline{abc} \times \overline{df} = abcdf$; ce qu'il falloit demontrer.

Theorême.

XCVIII *Le produit de deux grandeurs precedées des mêmes signes b comme* +a, +b, *ou* —a, —b, c'est le pro-

produit de ces grandeurs précedé du signe $+$*; je veux dire que c'est* $+ab$.

Il faut prouver en premier lieu que
$+ab. +a :: +b, +1.$

Puisque *ab* est le produit des gr: *a, b*,
$ab. a :: b. 1$*; donc *82.
$+ab, +a :: +b. +1$*. *38.

Il faut prouver en second lieu que
$+ab. -a :: -b. +1.$

On vient de voir que
$+ab +a :: +b. +1.$ donc ; en changeant les signes des moiens,
$+ab. -a :: -b. +1$*. *68.

Theorême.

Le produit de deux gr: précedées de diférens signes, comme $+a$, $-b$, *c'est le produit de ces grandeurs precedé du signe* $-$, *je veux dire que c'est* $-ab$. XCIX.

Il faut prouver que
$-ab. +a :: -b. +1.$

Il a été demontré dans le Theorême précedent, que
$+ab. +a :: +b. +1$; donc en changeant les signes des deux antecedens, . . .
$-ab. +a :: -b. +1$* *68.

CHAPITRE III.

De la Multiplication des grandeurs litterales entiéres.

Problême.

Multiplier une grandeur literale & entiére par une autre, C.

Exemples.

$$\begin{array}{r|r|r|r|r} +a & -a \quad +a & -a & +3a & +a \\ +b & -b \quad -b & +b & +b & +3b \\ \hline +ab & +ab \quad -ab & -ab & +3ab & +3ab \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r} +3a & +3ab & +3a^2b^2c & +a \; +b \; -c \\ +5b & +2ab & +5a^2bc^2 & +d \\ \hline +15ab & +6a^2b^2 & +15a^4b^3c^3 & +ad +bd -cd \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +a -b \\ +c -d \\ \hline +ac -bc -ad +bd \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +3a^2b -4c^3d \\ +5a^3b -8c^5d^2 \\ \hline +15a^5b^2 -20a^3bc^3d -24a^5bc^5d^2 +32c^8d^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} xx & +2x & +1 & \\ x & +1 & & \\ \hline x^3 & +2xx & +x & \\ & +xx & +2x & +1 \\ \hline x^3 & +3xx & +3x & +1 \end{array}$$

SECTION III.

Où l'on explique la Diviſion des grandeurs entiéres, & les proprietés des raports, qui dépendent de cette operation.

CHA-

CHAPITRE I.

De la Division des nombres entiers.

Définition.

D*iviser* une grandeur *a* par une autre *b*, c'est trouver la grandeur qui est à l'unité, comme la premiere *a* est à la seconde *b*. CI.

La premiere gr: *a* s'apelle le *dividende;* la seconde *b* le *diviseur;* & celle qu'il faut trouver, le *quotient* de celle là *a* divisée par celle ci *b*.

Exemples. Diviser 6 par 3, c'est trouver le nombre qui est à 1 comme 6 est à 3. Ainsi ce nombre est 2, car 2.1 : : 6.3: Dans cet exemple, 6 est le dividende; 3, le diviseur; & 2, le quotient.

Diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{3}$ c'est trouver le nombre qui est à 1, comme $\frac{2}{3}$ est à $\frac{5}{3}$; nombre qui est donc $\frac{2}{5}$, Car $\frac{2}{5}$, : : $\frac{2}{3}$. $\frac{5}{3}$

Probleme.

Diviser un nombre entier par un autre. CII.

```
6 3 9 0  { . . . . .         1
3 3 3    { 2130      7 8 0 9 1 { 26030  -
                     3 3   3   {        3
```

```
       { . . .
6400   { 200
32     {
64
```

```
           ⎧ . . . .   2634
63450678 ⎨ 7086     ------
8954 . . . ⎩            8954
62678 . . .
-------
77267 .
 8954 .
71632 .
-------
 56358
  8954
 53724
-------
  2634
```

CHAPITRE II.

Où l'on établit les fondemens de la Division des gr: literales entiéres, & les proprietés des raports, qui dépendent de cette operation.

Corollaires de la Définition générale de la Division.

CIII. *Si l'on divise le produit* ab *de deux gr:* a,b, *par l'une* a *de ces deux gr:, on trouvera l'autre* b *pour quotient.*

Il faut prouver que
*b.*1 :: *ab. a;* ce qui est clair, puisque
*86. *ab.a* :: *b.*1*, & que cette proportion est la même que la precédente.

CIV. *Si l'on divise le produit* a b c d f *de plusieurs grandeurs* a,b,c,d,f, *par l'une* a *de ces grandeurs, ou par le produit* a b c *d'une partie d'entr'elles, on aura pour quo-*

quotient le produit bcdf, *ou* df, *des autres; ou la gr: restante s'il n'en reste qu'une.*

Il faut prouver en premier lieu que si l'on divise *abcdf* par *a*, on trouvera *bcdf* pour quotient; ce qui est clair par l'article precedent, puisque

$abcdf = bcdf \times a$* *94.

Il faut prouver en second lieu que si l'on divise *abcdf* par *abc*, on aura pour quotient *df*; ce qui est encore évident par le Corollaire qu'on vient de lire, puisque

$abcdf = abc \times df$* *97.

Supposé qu'après avoir divisé une gr: a *par une autre* b, *on multiplie l'un par l'autre le diviseur* b, *& le quotient* q, *on aura pour produit une gr:* bq *égale au dividende* a. CV.

q.1 : : *a*. *b*, & il faut prouver que

bq=*a*, ce qui est évident par l'article 90.

Définition.

On marque ainsi le quotient d'une gr: *a* divisée par une autre *b*, $\frac{a}{b}$. CVI.

Theorême.

Si l'on divise deux gr: a. b *par une même gr:* c, *on aura deux quotiens qui seront entr'eux comme ces grandeurs*, a, b. CVII.

Il faut prouver que

$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$: : *a*. *b*.

Il

Il suit de la nature de la Division que

$\frac{a}{c}.1 :: a. c$, & que

$\frac{b}{c}.1 :: b. c$, Or ces deux proportions donnent les deux suivantes, *alternando*

$\frac{a}{c}. a :: 1. c$,

$\frac{b}{c}. b :: 1. c$; desquelles il resulte celle ci

78. $\frac{a}{c}. a :: \frac{b}{c}. b$, qui donne cette autre, alternando

$\frac{a}{c}. \frac{b}{c} :: a. b$

Corollaire.

CVIII. *Soit une proportion* a.b :: c. d. *si l'on divise un antecedent* a *de cette proportion*, *&* *son consequent* b, *par une même gr:* m, *la proportion aura toujours lieu, je veux dire que* $\frac{a}{m}. \frac{b}{m} :: c. d$

a. b :: c. d, & il faut démontrer que

$\frac{a}{m}. \frac{b}{m} :: c. d$, ce qui est bien clair; car si, les antecedens *a*, *c*, de la premiére proportion, contienent par ex:, deux fois les tiers de leurs con-

cousequens, il faut que $\frac{a}{m}$ contienne aussi 2 fois le tiers de $\frac{b}{m}$*; puisque $\frac{a}{m}.\frac{b}{m}$ :: a. b. *77.

Theorême.

Suposé que plusieurs raports, comme ceux de a *à* b, *& de* c *à* d *soient égaux, si l'on divise les antecedens* a, c *par leurs consequens* b, d, *les quotiens* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *seront pareillement égaux.* CIX.

a.b :: c.d, & il faut démontrer que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Par la nature de la division

$\frac{a}{b}$.1 :: *a.b*,

$\frac{c}{d}$.1 :: *c.d*; donc puisque *a. b :: c. d*

$\frac{a}{b}$.1 :: $\frac{c}{d}$.1*; par consequent. *78.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$* *72.

Theorême.

Aiant multiplié, ou divisé deux gr: a, b *par une même gr:* c, *si l'on divise le premier produit* a c *par le* CX.

second bc, *ou le premier quotient* $\frac{a}{c}$ *par le second* $\frac{b}{c}$, *on aura le même quotient qu'on auroit trouvé si l'on avoit dabord divisé la premiere grandeur a, par la seconde* b.

Il faut démontrer en premier lieu, que

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

Il suit de l'article 87, que

$ac.\ bc :: a.\ b$; donc

*109. $$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}*$$

Il faut démontrer en second lieu que le quoquotient de $\frac{a}{c}$ divisé par $\frac{b}{c}$ est égal à celui de *a* divisé par *b*.

Il suit de l'Article 108, que

$\frac{a}{c}.\frac{b}{c} :: a.\ b$; donc le quotient de $\frac{a}{c}$ divisé par $\frac{b}{c}$

*109. est égal à celui de *a* divisé par *b**.

Theoréme.

CXI. *Le quotient d'une grandeur précedée du signe* + *ou* —, *divisée par une autre gr: précedée du même signe, par ex: celui de* +a *divisée par* +b *ou de* —a *divisée par* —b, *c'est celui de cette premiére gr:* a *divisée par la seconde* b, *précedé du signe* +, *je veux dire que c'est* $+\frac{a}{b}$.

Il faut démontrer en premier lieu, que

$$+\frac{a}{b}. +1 :: +a. +b$$

Par la nature de la Division.

$\frac{a}{b}.1 :: a. b$, donc

$+\frac{a}{b}.+1 :: +a.+b$* *38.

Il faut demontrer en second lieu que

$+\frac{a}{b}.+1 :: -a.-b.$

On vient de prouver que

$+\frac{a}{b}.+1 :: +a.+b$; donc, en changeant les signes des deux derniers termes,

$+\frac{a}{b}.+1 :: -a.-b$* *68.

Theorême.

Le quotient d'une gr: précedée du signe + ou —, divisée par une autre gr: précedée d'un signe diférent, par ex: celui de +a *divisée par* —b, *ou de* —a *divisée par* +b, *c'est celui de cette premiére gr:* a *divisée par la seconde* b, *précedé du signe* —, *je veux dire que c'est* $-\frac{a}{b}$. CXII.

Il faut démontrer en premier lieu que

$-\frac{a}{b}. +1 :: +a. -b$

On a fait voir dans le Theorême précedent que

$+\frac{a}{b}.+1 :: +a.+b$; donc, en changeant les signes des extrémes

$-\frac{a}{b}.+1 :: +a. -b$* *68.

Il faut démontrer en ſecond lieu que

$-\frac{a}{b}. +1 :: -a. +b.$

On vient de remarquer que

$+\frac{a}{b}. +1 :: +a. +b$; donc en changeant les ſignes des antecédens

68. $-\frac{a}{b}. +1 :: -a. +b$.

CHAPITRE III.

De la Diviſion des grandeurs litterales entiéres.

Problême.

Diviſer une grandeur litterale & entiére par une autre.

$\begin{matrix}+a\\+b\end{matrix}\left\{+\frac{a}{b}\right.$	$\begin{matrix}-a\\-b\end{matrix}\left\{+\frac{a}{b}\right.$	$\begin{matrix}+a\\-b\end{matrix}\left\{-\frac{a}{b}\right.$
$\begin{matrix}-a\\+b\end{matrix}\left\{-\frac{a}{b}\right.$	$\begin{matrix}+ab\\+a\end{matrix}\left\{+b\right.$	$\begin{matrix}-ab\\-a\end{matrix}\left\{+b\right.$
$\begin{matrix}+ab\\-a\end{matrix}\left\{-b\right.$	$\begin{matrix}-ab\\+a\end{matrix}\left\{-b\right.$	$\begin{matrix}+abc\\+a\end{matrix}\left\{+bc\right.$
$\begin{matrix}+abc\\+ab\end{matrix}\left\{+c\right.$	$\begin{matrix}+abcd\\+ab\end{matrix}\left\{+cd\right.$	$\begin{matrix}+6ab\\+a\end{matrix}\left\{+6b\right.$
$\begin{matrix}+6ab\\+3a\end{matrix}\left\{+2b\right.$	$\begin{matrix}+6a^3b^2\\+3a^2b\end{matrix}\left\{+2ab\right.$	

$$\begin{array}{l} \mp 6abc \\ + 3abd \end{array} \left\{ + 2 \overset{c}{\underset{d}{\div}} \right. \left| \begin{array}{l} +ab-ac+ad \\ +a, +a, +a \end{array} \right\{ +b-c+d$$

$$\begin{array}{l} +ab-ac+ad \\ -a, -a, -a \end{array} \left\{ -b+c-d \right.$$

$$\begin{array}{l} +aa+2ab+bb \\ +a+b \quad . \\ +aa+ab \quad . \\ \hline +ab+bb \\ +a+b \\ +ab+bb \end{array} \left\{ +a+b \right.$$

$$\begin{array}{l} +aa \quad -bb \\ +a \quad +b \quad . \\ +aa \quad +ab \quad . \\ \hline -ab-bb \\ +a+b \\ -ab-bb \end{array} \left\{ +a-b \right.$$

SECTION IV.

De la Régle de proportion & de celle de Societé.

CHAPITRE I.

De la Régle de Proportion.

Problême.

Les trois premiers termes a, b, c, *d'une proportion étant donnés, trouver le quatriéme x.* CXIV.

a. b.

$a.b :: c.x$; les trois premiers termes a,b,c, sont connus, & il faut trouver le quatriéme x

Puisqu'on supose que

$a.b :: c.x$, il s'ensuit que

90. $ax = bc$; d'où l'on aura, en divisant ces deux produits égaux par a

107. $x = \frac{bc}{a}$; Ce qui donne la Régle suivante, qu'on apelle *Régle de proportiou simple*, ou la *Régle de trois simple*.

Regle. On multipliera l'un par l'autre les deux derniers termes connus b,c; ensuite on divisera leur produit bc par le premier terme a, & l'on aura au quotient $\frac{bc}{a}$ la grandeur x qu'on cherchoit.

Exemple.

Suposé qu'il faille trouver le quatriéme nombre proportionnel à ces trois

2.3 :: 20 on operera de la maniere qu'on voit icï

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 60 \\ x \end{array} \Big\{ 30$$, c'est le nombre cherché.

CHAPITRE II.

De la Regle de Societé:

Problême.

CXV. *Partager une grandeur donnée* g *en tel nombre de parties qu'on voudra, qui soient proportionnelles à autant d'autres grandeurs données* a, b, c.

Regle.

Regle. On cherchera les quatriémes termes x, y, z, des proportions M, N, P, marquées ci dessous ; ces quatriémes termes x, y, z seront les parties qu'il s'agissoit de trouver.

M . . . $+a \ +b \ +c \ . \ g :: a \ . \ x.$

N . . . $+a \ +b \ +c \ . \ g :: b \ . \ y.$

P . . . $+a \ +b \ +c \ . \ g :: c \ . \ z.$

Je veux dire, & je vais le prouver, 1ò. que $x.y.z :: a.b, c$

2ò. que $x+y+z = g.$

Puisque les proportions M, N, P, ont les mêmes deux premiers termes, il s'ensuit que $a.x :: b.y$* &, alternando que *78.

$a.b :: x,y:$ On prouvera de la même maniére que

$b.c :: y.z;$ donc

$x.y.z :: a.b.c$, ce qu'il falloit premiérement démontrer.

Les proportions M, N, P, aiant les mêmes deux premiers termes, il en resulte que

$a.x :: b.y :: c.z$* par consequent que *78.

$a+b+c. \ x+y+z :: a.x$*. Or la proportion M est celle ci *69.

$a+b+c.g :: a.x;$ donc

$a+b+c.x+y+z :: a+b+c.g$*; donc *78.

$x+y+z = g$*, ce qu'il falloit démontrer en second lieu *72.

La Regle dont on vient de lire la démonstration porte le nom de *Regle de Societé*, lorsqu'on l'emploie à résoudre des questions semblables à la suivante.

Exemple.

Trois Marchands qui s'associent mettent dans le fond commun, le premier 100, pistolles, le second 150, & le dernier 300. Ils gagnent

gnent 1650 pistolles; on demande qu'elle partie chacun d'eux doit tirer de ce gain.

J'apelle la partie du premier, x; celle du second, y; celle du 3me, z, & je vois
1ò. que $x.y.z$ :: 100. 150. 300
2ò. que $x+y+z=1650$

De là je conclus qu'il ne s'agit que de partager 1650 en trois parties qui soient proportionnelles aux nombres 100, 150, 300. Ainsi j'opere conformément à la Régle qu'on vient de voir.

M . . 550. 1650 :: 100. 300, portion du 1er. Marchand.
N . . 550. 1650 :: 150.450, portion du second.
P . . 550. 1650 :: 300.900, portion du 3me.

SECTION V.
Des Raisons composées.

Définition.

CXVI. Lorsque plusieurs raports, comme ceux de A à B, & de C à D, pris un à un, sont égaux à autant d'autres raports, pris aussi un à un, par ex: à ceux de a à b, & de c à d, on marque ainsi cette égalité
A, B. C, D :: a, b. c, d.

Theorême.

CXVII. *Suposé que plusieurs raports, comme ceux de* A *à* B, *& de* C *à* D, *pris un à un, soient égaux à autant d'autres rapports, pris aussi un à un, par ex:, à ceux de* a *à* b, *& de* c *à* d; *le produit* AC *des antecedens des pre-*

premiers raports, est au produit BD *de leurs consequens, comme le produit* ac *des antecedens des seconds raports, est au produit* bd *de leurs consequens.*

A,B. C, D : : *a, b. c, d*, & il faut prouver que AC. BD. : : *ac. bd.*

A.B : : *a, b*, & C.D : : *c.d*, par la supoſition; donc Ab=Ba, & Cd=Dc*. Or ſi l'on multiplie A*b* par C*d*, & B*a* par D*c*, on aura evidemment l'égalité ſuivante. *90.

A*b*C*d*=B*a*D*c*, qui pourra être exprimée de cette maniére.

$\overline{AC}\times\overline{bd}=\overline{BD}\times\overline{ac}$*; d'où l'on conclurra que *97.

AC . BD : : *ac . bd**, ce qu'il falloit démontrer. *91.

Définitions.

Lors qu'une raiſon eſt égale à celle que le produit des antecédens de pluſieurs autres raiſons a au produit de leurs conſequens, elle eſt dite *compoſée* de ces autres raiſons qui s'apellent ſes raiſons *compoſantes*. CXVIII.

Soient par ex:, la raiſon de *m* à *n*, & celles de *a* à *b*, de *c* à *d*; ſi *m.n* : : *ac. bd*, la raiſon de *m* à *n* ſera dite compoſée de celles de *a* à *b*, & de *c* à *d*; & ces deux derniéres raiſons ſeront apellées ſes raiſons compoſantes.

Une raiſon compoſée de deux raiſons égales, s'apelle une raiſon *doublée* de chacune de ces raiſons égales, une raiſon compoſée de trois raiſons égales, s'apelle une raiſon *triplée* de chacune de ces raiſons égales, & ainſi de ſuite. Soient, comme auparavant, la raiſon de *m* à *n*, & celles de *a* à *b*, & de *c* à *d*; ſi *m.n* :: *ac.bd*. & que les raiſons de *a* à *b*, & de *c* à *d*, ſoient égales, celle de *m* à *n*, ſera une raiſon doublée de chacune de ces deux raiſons. CXIX.

Theorême.

CXX. *Si deux raiſons ſont composées d'autant de raiſons l'une que l'autre, & que les raiſons compoſantes de la premiére, priſes une à une, ſoient égales aux raiſons compoſantes de la ſeconde, priſes auſſi une à une, ces deux raiſons composées ſont pareillement égales entr'elles.*

Soient les raiſons compoſées, celles de M à N, de *m* à *n*; les raiſons compoſantes de la premiére, celles de A à B, de C à D; les raiſons compoſantes de la ſeconde, celles de *a* à *b*, de *c* à *d*, Il faut démontrer que ſi
A,B. C,D : : *a,b. c,d.*
M.N : : *m. n.*

Par la nature des raiſons compoſées
M.N : : AC. BD, &
m.n : : *ac. bd.* Or
AC.BD : : *ac. bd*, par le Theorême précedent; donc
*78. M.N : : *m.n**, ce qu'il falloit démontrer.

Theorême.

CXXI. *Supoſé que dans une ſuite de gr:,* p,r,s,t, *le raport de la* 1ere p *à la* 2me. r. *ſoit égal à un autre raport, de* a *à* b; *que celui de la* 2me. r *à la* 3me. s, *ſoit pareillement égal à un autre raport de* c *à* d; *que celui de la* 3me. s, *à la* 4me t, *ſoit auſſi égal à un autre raport de* f *à* g, *&c. Cela poſé, le raport de la* 1ere *gr:* p, *de cette ſuite, à la derniére* t, *eſt composé de tous ces autres raports, de* a *à* b, *de* c *à* d, *de* f *à* g.

p,r. r, s. s, t : : a,b. c, d. f, g; & il faut prouver que
p.t : : acf. bdg.

Il ſuit de la ſupoſition, que
*117. *prs. rst : : acf. bdg**; donc en diviſant les deux premiers termes par *rs*,
*107. *p.t : : acf. bdg**.

Theo-

Theorême.

Dans une suite quelconque de grandeurs a,b,c,d,f,g *le raport de la* 1*ere.* a *à la derniére* g, *est composé du raport de la* 1*ere.* a *à la* 2*me.* b*; de celui de la* 2*me* b *à la* 3*me* c, *& ainsi de suite jusqu'à la derniére* g *inclusivement.* CXXII.

Il s'agit de faire voir que le raport de *a* à *g* est composé de ceux de *a* à *b*; de *b* à *c*; de *c* à *d*; de *d* à *f*, & de *f* à *g*; c'est à dire, que

a.g :: abcdf. bcdfg.

Il est bien évident que

a.g :: a.g; donc, en multipliant les deux derniers termes par *bcdf*,

a.g :: abcdf. bcdfg;* ce qu'il falloit démontrer. *88.

Problême.

Les antecedens, & les consequens de plusieurs raisons composantes étant connus, avec l'antecedent de la raison composée, trouver le consequent de cette derniére raison. CXXIII

Que les raisons composantes soient celles de *a* à *b*, de *c* à *d*. & que la raison composée soit de *m* à *x*.

Cela posé

*m.x :: ac. bd**, ou, ce qui revient au même; *118.

ac.bd :: m.x, proportion qui donne la Régle suivante qu'on apelle *Régle de trois composée.*

Régle. 1o. On multipliera les uns par les autres les antecédens *a, c* des raisons composantes, en suite leurs consequens *b, d;* 2o. On cherchera la quatriéme proportionnelle * à ces trois grandeurs, le produit *ac* des antecedans des raisons composantes, le produit *bd* *114.

des consequens, & l'antecédent *m* de la raison composée ; cette quatriéme proportionnelle sera la grandeur qu'il falloit trouver.

Exemple.

Suposé que les raisons composantes soient celles de 2 à 3, de 9 à 12, & que l'antecedent de la raison composée soit 6 ; on en trouvera donc le consequent de cette maniére.

Raisons compo- santes. { 2. 3
9.12

18 . 36 :: 6 . 12. NB. C'est la Régle de trois simple qui donnera ce 4me. terme 12.

Fin du second Livre.

LIVRE III.

Des Fractions.

SECTION I.

Où l'on explique les reductions des Fractions & celles des grandeurs entiéres en Fractions.

CHAPITRE I.

Qui contient les fondemens des reductions des fractions.

Axiome.

SI une grandeur a *est contenue exactement dans une autre* b, *& que cette autre* b *le soit dans une troisiéme* c, *la premiére* a *l'est aussi dans la troisiéme* c. CXXIV

Axiome.

Si une grandeur a *est contenue exactement dans chacune des parties* b, c *d'une autre grandeur* b+c, *elle l'est pareillement dans toute cette grandeur* b+c. CXXV.

Axiome.

Si une grandeur a *est contenue exactement dans une autre* b+c *divisée en deux parties, & dans l'une* b *de ces deux parties, elle l'est aussi dans l'autre* c. CXXVI

Demande.

Suposé que toute commune mesure de plusieurs grandeurs a, b, *soit une commune mesure de plusieurs autres grandeurs,* c, d, f, *& que reciproquement toute* CXXVII.

commune mesure de ces derniéres c, d, f, *en soit une des premiéres* a,b ; *la plus grande commune mesure* x *des premiéres* a,b, *est la même que la plus grande commune mesure* y *des derniéres* c,d,f.

Car si *x*, par exemple, étoit plus grande que *y*, *x* ne pourroit pas être une commune mesusure des gr: *c, d, f;* puisque par la suposition, *y* est la plus grande commune mesure de ces gr: *c, d, f.*

Theorême.

CXXVIII *Suposé que trois gr:, comme* mb+c,b,c *soient telles que la premiére* mb+c *contienne la seconde* b *un nombre de fois quelconque* m, *& de plus la troisiéme* c. 1ò. *Toute commune mesure* x *des deux premiéres* mb+c, b *en est une de deux derniéres* b, c; 2ò; *Reciproquement, toute commune mesure* y *des deux derniéres* b,c, *en est une des deux premiéres* mb+c,b.

mb+c, b,c, sont donc les trois gr: suposées.

Puisque *x* est une commune mesure des deux premiéres *mb+c,b,* 1ò. Elle est contenue exactement dans la premiére *mb+c;* 2ò. elle l'est dans la seconde *b*, & par consequent
*124. dans *mb** partie de la premiére *mb+c*. Donc
*126. elle l'est dans l'autre partie *c**. Ainsi la gr: *x* est contenue exactement & dans *b* & dans *c*, ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.

Puisque *y* est une commune mesure des deux derniéres gr: *b, c,* 1ò. elle est contenue exactement dans la seconde *b,* & par consequent
*124. dans *mb**, partie de la premiére gr: *mb+c*. 2ò. Elle l'est dans la derniére *c* qui fait l'autre partie de la premiére *mb+c*. Donc elle l'est dans
*125. cette grandeur *mb+c;**. Ainsi la gr: *y*, est contenue exactement & dans *mb+c* & dans *b,* ce qu'il falloit démontrer en second lieu.

Corol-

Corollaire.

Soit une ſuite de grandeurs a,b,c,d,f *telles que ſi on en prend trois quelconques qui ſe ſuivent immediatement, par ex: les trois premiéres* a,b,c, *ces trois gr: aient les conditions marquées dans le Theorême précedent. Cela poſé* 1ò. *Toute commune meſure* x *des deux premiéres gr:* a, b *de cette ſuite en eſt une des deux derniéres* d, f. 2ò. *Reciproquement. toute commune meſure de deux derniéres* d,f *en eſt une des deux premiéres* a. b, CXXIX.

a,b,c,d,f eſt la ſuite ſupoſée.

1ò. Puiſque les trois gr: *a, b, c* ont les conditions marquées dans le Theorême, *x* commune meſure des deux premiéres *a, b,* en eſt une des deux derniéres *b, c.* 2ò. Puiſque les trois gr: *b, c, d* ont auſſi ces conditions, & que *x* eſt une commune meſure des deux premiéres *b, c* comme on vient de le prouver, *x* eſt une commune meſure des deux derniéres *c, d.* 3ò. On démontrera de la même maniére que *x* eſt une commune meſure de *d* & de *f*.

La démonſtration que *y* commune meſure des deux derniéres gr: *d, f* de la ſuite, eſt auſſi une commune meſure des deux premiéres *a,b,* ſe fera en rétrogradant de ces deux derniéres *d, f* aux deux premiéres *a. b.*

Corollaire.

Soit une ſuite de gr: a,b,c,d,f *telles qu'on les a ſupoſées dans le Corollaire précedent. La plus grande commune meſure des deux premiéres* a, b *eſt la même que celle des deux derniéres* d, f.* CXXX *127.

Pro-

Problême.

CXXXI *Trouver la plus grande commune mesure de deux grandeurs.*

95a (2
40a (2
15a (1
10a (2
5a (2
o

Suposé par ex: qu'il faille trouver celle de ces deux 95a, & 40a, j'opére de la maniére qu'on voit ici a côté; 1ò. Je divise la plûs grande 95a par la moindre 40a; je veux dire que je retranche la moindre 40a de la plus grande 95a autant de fois qu'elle y est contenue ; je trouve que 95a contient 2 fois 40a, & de plus le reste 15a. 2ò. Je divise le diviseur précedent 40a par ce reste 15a, & je trouve qu'il le contient 2 fois, avec le reste 10a. 3ò. Je divise le diviseur précedent 15a par ce reste 10a, & je trouve qu'il le contient une fois, avec le reste 5a, 4ò. Enfin je divise le prochain diviseur 10a par ce reste 5a, & je trouve qu'il le contient 2 fois sans aucun reste , d'où je conclus que 5a est la plus grande commune mesure de 95a & de 40a.

Car il est clair que les gr: 95a, 40a, 13a, 10a, 5a sont dans le cas du Corollaire précedent; d'où il suit que la plus grande commune mesure des deux premiéres 95a & 40a est la même que celle des deux derniéres 10a & 5a, laquelle est évidemment 5a, puisque 10a contient exactement deux fois 5a. Cet exemple étant bien entendu donne la Régle suivante.

Régle. On divisera la plus grande des deux grandeurs proposées par la moindre ; ensuite le prochain diviseur par le reste qu'il aura donné, & l'on continuera cette opération jusques à ce qu'on soit arrivé à un diviseur qui ne donne aucun reste. Ce diviseur sera la plus gran-

grande commune mesure des deux grandeurs proposées.

Corollaire.

La plus grande commune mesure de deux gr: par ex: de 95a & 40a contient exactement toute autre commune mesure de ces deux grandeurs. CXXXII.

Car toute commune mesure des deux premiéres grandeurs 95*a* & 40*a* de la suite 95*a*, 40*a*, 15*a*, 10*a*, 5*a*, étant une commune mesure des deux derniéres, 10*a*, 5*a**, est par la même contenue exactement dans la derniére 5*a*. Or cette derniére gr: 5*a* est la plus grande commune mesure des deux premiéres 95*a* & 40*a*, comme on l'a demontré; donc *la plus grande commune mesure &c.* * 129

Corollaire.

La plus grande commune mesure de deux nombres entiers, par ex: de ceux ci 95 & 40, est toujours un nombre entier. CXXXIII.

On n'a pour s'en convaincre qu'à se rendre attentif aux opérations qu'il faut faire pour la trouver; on verra d'abord qu'elles ne peuvent jamais donner que des nombres entiers.

Theorême.

Suposé que quatre grandeurs, comme 95a, 40a; 95b, 40b, *soient en proportion, la plus grande commune mesure des deux premiéres* 95a, 40a *est à celle des deux dernieres* 95b, 40b, *comme la premiére grandeur* 95a *est à la troisiéme* 95b, *& comme la seconde* 40a *est à la quatriéme* 40b. CXXXIV.

Il est évident par la Methode qu'il faut sui-

vre pour trouver ces deux plus grandes communes mesures; que si celle des deux premiéres gr: 95*a*, 40*a*, est 5*a*, celle des deux derniéres 95*b*, 40*b*, sera pareillement 5*b*. Or ...

* 70 5*a*. 5*b* :: *a*. *b*, * &
95*a*. 95*b* :: *a*. *b*; donc
* 78 5*a*. 5*b* :: 95*a*. 95*b*. * On prouvera de la même maniere que
5*a*. 5*b* :: 40*a*. 40*b*.

Définition.

CXXXV. Lorsque la plus grande commune mesure de deux ou de plusieurs nombres, comme de ceux ci 8, 9, est l'unité, on dit de ces nombres qu'ils sont *premiers entre'eux*.

Theorême.

CXXXVI. *Si l'on divise deux grandeurs* mc, nc *par leur plus grande commune mesure* c, *les quotiens* m, n *seront premiers entr'eux*.

Car s'ils ne l'étoient pas, c'est à dire, si leur plus grande commune mesure, qui est un nom-
*133 bre entier, * n'etoit pas l'unité, que ce fut par éxemple 2; suposé que 2 fut contenu dans *m* le nombre de fois *p* & dans *n* le nombre de fois *r*, on auroit ...

$m = 2p$, $n = 2r$, par consequent
$mc = 2pc$, $nc = 2rc$. Ainsi les grandeurs proposées *mc*, *nc* seroient celles ci ...
$2pc$, $2rc$, dont la plus grande commune mesure ne seroit pas *c*, comme on supose qu'elle doit l'étre.

Theo-

Theorême.

Supoſé que quatre nombres entiers A, B; a, b *ſoient en proportion, & que les deux derniers* a. b *ſoient premiers entr'eux ; les deux premiers* A, B, *contiennent exactement & le même nombre de fois ces deux derniers* a, b, *chacun ſon correſpondant, ſavoir* A, a; B, b. CXXXVII

La plus grande commune meſure *m* des deux premiers nombres *A*, *B*, eſt un nombre entier, * celle des deux derniers *a*, *b*, qui ſont ſupoſés premiers entr'eux eſt 1. Cela poſé, puiſque . . . , *133

m. 1 : : *A*. *a*, * & que *134
m. 1 : : *B*. *b*, le Theorême eſt bien évident.

Corollaire.

Si deux nombres entiers a, b *ſont premiers entr'eux, ils ſont moindres que tous les autres nombres entiers* A, B, *qui leur ſont proportionnels.* CXXXVIII

Définition.

Lors qu'une gr: *a* contient une ou pluſieurs fois ſans reſte une autre gr: *b*, on dit qu'elle eſt *multiple* de cette autre gr: *b*. Ainſi 12. eſt multiple de 6. CXXXIX.

Lors qu'une gr: *a* eſt multiple de chacune de pluſieurs grandeurs *a*, *b*, *c*, on dit ſimplement qu'elle eſt multiple de ces gr: *a*, *b*, *c*.

Problême.

CXL. *Trouver le moindre multiple de deux nombres entiers* mc, nc .

Régle 1ò On cherchera la plus grande commune mesure *c* des deux nombres proposés
*137 *mc*, *nc*. * 2ò. on divisera l'un de ces deux nombres *mc*, *nc*, par exemple, le premier *mc* par cette plus grande commune mesure *c*, d'où l'on aura un quotient *m*. 3ò. on multipliera ce quotient *m* par l'autre nombre proposé *nc*, & l'on aura au produit *mnc* le moindre multiple des deux nombres proposés *mc*, *nc*.

Il est bien évident que *mnc* est un multiple de *mc*, & de *nc*; il n'y a donc plus qu'à faire voir que c'est le moindre de tous. Pour cet effet, je vais prouver que tout multiple *x* de ces deux nombres *mc*, *nc* contient exactement celui là *mnc*; d'où il suivra manifestement que *mnc* est le moindre.

Que *x* contienne *mc* le nombre de fois *a*, & *nc* le nombre de fois *b*, on aura ces deux égalités...

$amc = x$, $bnc = x$, qui donneront celle ci...
$amc = bnc$, & par consequent cette autre...
$am = bn$, d'où l'on déduira la proportion suivante...

91 $a.b::n.m$. Or les deux derniers nombres *m*, *n* etant les quotiens des proposés *mc*, *nc* divisés par leur plus grande commune mesure
*136 *c*, ils sont premiers entr'eux,*
*137 donc *a* contient exactement *n**.

Maintenant, que le nombre de fois que *a* contient *n* soit nommé *p*, on aura l'égalité

$a = pn$

a=pn d'où l'on conclura en mettant *pn* au lieu de a, dans la premiere des égalités précedentes que...

pnmc=x. Or il est bien évident que *pnmc* contient exactement *mnc.*

Corollaire.

Tout multiple de deux nombres entiers mc, nc, *contient exactement leur moindre multiple* mnc. CXLI.

Problême.

Trouver le moindre multiple d'autant de nombres entiers a, b, c, d, *qu'on voudra.* CXLII.

Régle On cherchera 1°. le moindre multiple *x* des deux premiers *a. b;* 2°, celui de *x* & du troisiéme *c*, lequel j'apelle *y*; 3°. celui de *y* & du quatriéme *d*, lequel je nomme *z*, & qui sera celui des nombres proposés *a, b, c, d.*

Je me contenterai de prouver que *y* est le moindre multiple de *a, b, c;* on prouvera de la même maniere que *z* est celui de *a, b, c, d,*

a, b, c
x, y

Puisque *x* est multiple de *a* & de *b*, *y* qui est multiple de *x* & de *c*, l'est donc de *a, b, c.* Ainsi il n'y a plus qu'à faire voir que *y* est le moindre multiple de ces nombres *a, b, c;* ce qui sera évident si l'on prouve que tout multiple de *a, b, c* contient exactement celui là *y*.

Tout multiple de *a, b, c,* par cela seul qu'il l'est de *a* & de *b*, l'est de *x**: Donc tout multiple de *a, b, c* l'est de *x* & de *c*; & par consequent contient exactement *y** *141 *141

CHAPITRE II.

Où l'on expl ique les reductions des fractions, & celles des grandeurs entiéres en fractions.

Avertissement.

Il faut rapeller ici l'article 23.

Définitions.

CXLIII Un nombre entier, comme 6, exprimé de cette maniére $\frac{6}{1}$, ce qui signifie 6 fois le nombre qui est contenu une fois dans l'unité, ou pour ainsi dire 6 uniémes, s'apelle aussi un *nombre rompu*, ou une *fraction*. Le nombre 6 écrit au dessus de la ligne, se nomme pareillement le *numerateur* de la fraction ; & le nombre 1 écrit au dessous, le *denominateur*.

CXLIV Un quotient algebraïque comme $\frac{a}{b}$, exprimé par le dividende *a* écrit au dessus d'une ligne, & par le diviseur *b* écrit au dessous porte encore le nom de *grandeur rompue*, ou de *fraction*. La grandeur *a* qui est au dessus de la ligne, s'apelle aussi le *numerateur* de la fraction ; & la grandeur *b* bui est au dessous le *denominateur*.

Avert. On va voir d'où vient qu'on donne les mêmes noms à toutes ces grandeurs.

Corol-

Corollaire.

Toute fraction est à l'unité, comme son numerateur est à son denominateur. CXLV.

Cela est déja bien évident à l'égard des fractions numeriques ; il est clair, par exemple, que

$\frac{2}{3} . 1 :: 2 . 3$, & que

$\frac{6}{1} . 1 :: 6 . 1$. A l'égard des fractions literales, comme $\frac{a}{b}$, il resulte de la nature de la division, que

$\frac{a}{b} . 1 :: a . b.$

Régle. Une fraction peut donc être considerée comme le quotient du numerateur divisé par le denominateur.

Theorême.

Les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *dont les numerateurs* a, c, *ont les mêmes raports avec leurs denominateurs* b, d, *sont égales.* CXLVI

a . b :: c . d, & il faut démontrer que,

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

145. $\frac{a}{b}$. 1 :: a.b, &

$\frac{c}{d}$. 1::*c*.*d*. Or *a*.*b*::*c*.*d* par la ſupoſition ; donc

78 $\frac{a}{b}$. 1 :: $\frac{c}{d}$. 1, & par conſequent,

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Corollaire.

CXLVII *Si l'on multiplie le numerateur & le denominateur d'une fraction* $\frac{a}{b}$ *par une même grandeur* m, *la nouvelle fraction qu'on aura* $\frac{am}{bm}$ *ſera égale à la premiére* $\frac{a}{b}$.

*87 Car *am*. *bm*::*a*.*b**

CXLVIII. *Si l'on diviſe le numerateur & le denominateur d'une fraction* $\frac{am}{bm}$ *par une même grandeur* m, *la nouvelle fraction qu'on aura* $\frac{a}{b}$ *ſera égale à la premiére* $\frac{am}{bm}$

*107. Car *a*.*b*:: *am*.*bm*.*

Theo-

Theorême.

Lorsque des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *sont égales, leurs numerateurs* a, c *ont le même raport avec leurs denominateurs* b, d. CXLIX

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, & il faut démontrer que

$a.b :: c.d.$

$\frac{a}{b}.1 :: a.b$,* & *145.

$\frac{c}{d}.1 :: c.d$. Mais on supose que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

d'où il suit que

$\frac{a}{b}.1 :: \frac{c}{d}.1$. & par conséquent que

$a.b :: c.d.$

Corollaire.

Suposé qu'une fraction $\frac{a}{b}$ *soit égale à une autre* $\frac{c}{d}$ *dont le numerateur* c *& le denominateur* d *soient premiers entr'eux, les termes* a, b *de la premiére contiennent exactement & le même nombre de fois ceux* c. d, *de la seconde; chacun son correspondant.* CL.

Car puisque $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, il s'ensuit que

a . b : : c , d , & puiſque les deux derniers nombres *c , d* ſont premiers entr'eux
*137 le Corollaire eſt évident. *

CLI. *Supoſé qu'entre toutes les fractions* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *d'une même valeur, il y en ait une* $\frac{c}{d}$ *dont les deux termes* c , d *ſoient premiers entr'eux, cette fraction* $\frac{c}{d}$ *eſt donc exprimée par les moindres nombres.*

CLII. *Entre toutes les fractions* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *d'une même valeur il n'y en peut avoir qu'une ſeule* $\frac{c}{d}$ *dont les deux termes* c , d *ſoient premier entr'eux.*

On verra bientôt qu'il y en a toujours une.

Définition.

CLIII. Une fraction comme $\frac{2}{3}$, dont les deux termes ſont premiers entr'eux, s'apelle une *fraction primitive*, ou une fraction *reduite aux moindres termes*, c'eſt à dire, exprimée par les moindres nombres par leſquels elle puiſſe l'étre.

Ainſi *reduire une fraction aux moindres termes*, c'eſt exprimer la valeur de cette fraction par deux nombres premiers entr'eux.

Problême.

CLIV. *Reduire une fraction* $\frac{am}{bm}$ *aux moindres termes.*

Régle.

Régle 1°. On cherchera la plus grande commune meſure m de ſes deux termes am, bm; 2°. on les diviſera par cette plus grande commune meſure m; d'où l'on aura une nouvelle fraction $\frac{a}{b}$ qui ſera de la même valeur que la propoſée $\frac{am}{bm}$ * & dont les deux termes a, b ſeront premiers entr'eux *. * 148 *136

Exemples. Si la fraction donnée eſt $\frac{8}{12}$ on trouvera $\frac{2}{3}$; ſi c'eſt $\frac{27}{36}$, on trouvera $\frac{3}{4}$.

Problême.

Reduire une fraction $\frac{a}{b}$ *en une autre de la même valeur, & qui ait un denominateur donné* bm *multiple du denominateur* b *de cette fraction* $\frac{a}{b}$. CLV.

Régle. 1°. On diviſera le denominateur donné bm par le denominateur b de la fraction propoſée $\frac{a}{b}$; & l'on aura en conſequence de la ſuppoſition, un quotient entier m; 2°. On multipliera les deux termes a, b de la fraction propoſée $\frac{a}{b}$, par ce quotient m, ce qui donnera la fraction $\frac{am}{bm}$ égale à la propoſée, * & qui aura pour denominateur bm. * 147

Exemple.

Supoſé qu'il *faille reduire la fraction* $\frac{4}{6}$ *en une autre de la même valeur*, *& qui ait pour denominateur* 18 multiple de 6. 1ò. on diviſera 18 par 6, & l'on trouvera 3 pour quotient; 2ò. on multipliera les deux termes de la fraction $\frac{4}{6}$ par 3, & par là on la changera en celle ci $\frac{12}{18}$ qu'il falloit trouver.

Problême.

CLVI. *Reduire autant de fractions qu'on voudra* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{f}{g}$, *en d'autres de la même valeur*, *& qui aient un denominateur commun,*

Régle. 1ò. On multipliera les uns par les autres tous les denominateurs *b*, *d*, *g* des fractions propoſées; d'où l'on aura un produit *bdg* multiple de chacun d'eux. 2ò. On reduira * chacune de ces fractions en une autre de la même valeur, & qui ait pour denominateur ce produit *bdg*; aprés quoi le Problême ſera réſolu.

* 155

Problême.

CLVII. *Reduire autant de fractions qu'on voudra en d'autres de la même valeur*, *& qui aient le moindre denominateur commun qu'elles puiſſent avoir.*

Régle 1ò. Si les fractions propoſées ne ſont pas reduites aux moindres termes, on les y reduira; que ces fractions ainſi reduites ſoient repréſentées par $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{f}{g}$.

2ò. On

2o. On cherchera le moindre multiple des denominateurs b, d, g de ces fractions ainsi reduites. 3o. On les reduira en d'autres qui soient de la même valeur, & qui aient pour denominateur commun ce moindre multiple ;* *155
aprés quoi le Probléme sera résolu.

Car que les fractions proposées soient reduites en d'autres de la même valeur, & qui aient un denominateur commun quelconque n, il faut évidemment que ces fractions ainsi reduites soient égales à celles ci $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$, chacune à sa correspondante. Or les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$, étant primitives, il faut que n soit multiple de b, de d, & de g, *. Donc n sera le *150
moindre qu'il puisse étre, s'il est le moindre multiple de ces nombres b, d, g,

Probléme.

Reduire une grandeur entiére a *en une fraction de la même valeur, & qui ait un denominateur donné* b, CLVIII.

Régle. On multipliera la grandeur entiére a par le denominateur donné b, & l'on écrira le produit ab au dessus de la ligne, & le denominateur donné b au dessous ; d'où l'on aura la fraction $\frac{ab}{b}$ qu'il falloit trouver.

C'est une suise manifeste de ce qu'une fraction peut étre considerée comme le quotient du numerateur divisé par le denominateur. * *145

SECTION II.

Où l'on explique l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication & la Diviſion des Fractions.

Avertiſſement.

On ſupoſe dans les articles 159, 161, 163 que les fractions propoſées ſont reduites à un même denominateur. Si elles ne l'étoient pas, il les y faudroit d'abord reduire, & enſuite opérer ſur les nouvelles fractions conformément aux régles de ces trois articles.

Problême,

CLIX. *Ajouter enſemble pluſieurs fractions* $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}$,

Régle. On ajoutera leurs numerateurs a, b, c & l'on écrira leur ſomme $a+b+c$ au deſſus d'une ligne, ſous laquelle on mettra leur denominateur commun m, & l'on aura une fraction $\frac{a+b}{m}+c$ qui ſera égale à la ſomme des fractions propoſées $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}$.

Il faut démontrer que ... $\frac{a+b+c}{m}$

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}.$$

$\frac{a}{m} . 1 :: a . m$* *145
$\frac{b}{m} . 1 :: b . m$; donc, *alternando*
$\frac{c}{m} . 1 :: c . m$

$\frac{a}{m} . a :: 1 . m$
$\frac{b}{m} . b :: 1 . m$, donc
$\frac{c}{m} . c :: 1 . m$

$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} . a+b+c :: 1 . m$*, & *alternando* *69

$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} . 1 :: a+b+c . m$. Or

$\frac{a+b+c}{m} . 1 :: a+b+c . m$* ; donc *145

$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} . 1 :: \frac{a+b+c}{m} . 1$;* *78

par conſequent

$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$* *72

Exem-

Exemple.

Supoſé qu'il faille ajouter les fractions $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, on trouvera que la ſomme eſt $\frac{6}{7}$.

Theorême. Lemme.

CLX. *Les fractions* $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ *qui ont un même denominateur* m *ſont entr'elles comme leurs numerateurs* a, b.

Il faut prouver que . $\frac{a}{m} . \frac{b}{m} :: a, b$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{m} . 1 :: a . m \\ \frac{b}{m} . 1 :: b . m \end{array}\right\}$$ donc, *alternando*

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{m} . a :: 1 . m \\ \frac{b}{m} . b :: 1 . m \end{array}\right\}$$, par conſequent

$\frac{a}{m} . a :: \frac{b}{m} . b$: & *alternando*

$\frac{a}{m} . \frac{b}{m} :: a . b$, ce qu'il falloit démontrer.

Problême.

CLXI. *Souſtraire une fraction* $\frac{b}{m}$, *d'une autre* $\frac{a}{m}$

Régle.

Régle. On soustraira le numerateur b de la fraction $\frac{b}{m}$ qu'il faut soustraire, du numerateur a de l'autre fraction $\frac{a}{m}$, & l'on écrira le reste $a-b$ au dessus d'une ligne, sous laquelle on écrira le denominateur commun m, & l'on aura une nouvelle fraction $\frac{a-b}{m}$ qui sera le reste qu'il s'agissoit de trouver.

Il faut faire voir que

$$\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$$

$\frac{a}{m} . \frac{b}{m} :: a . b$*; donc, *dividendo* *160.

$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} . \frac{b}{m} :: a-b . b$. Or

$\frac{a-b}{m} : \frac{b}{m} :: a-b . b$*; donc *160

$\frac{a-b}{m} . \frac{b}{m} :: \frac{a}{m} - \frac{b}{m} . \frac{b}{m}$*; par consequent *78.

$\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$*; ce qu'il falloit démontrer. *72.

Exemple.

Si l'on soustrait $\frac{3}{8}$ de $\frac{7}{8}$ on trouvera que le reste est $\frac{4}{8}$.

Problême.

CLXII. *Multiplier deux fractions* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *l'une par l'autre.*

Régle. On multipliera leurs numerateurs *a*, *c* l'un par l'autre, & l'on écrira leur produit *ac* au dessus d'une ligne, sous laquelle on mettra le produit *bd* de leurs dénominateurs, & l'on aura une nouvelle fraction $\frac{ac}{bd}$ qui sera le produit des deux fractions proposées.

Il faut prouver, conformément à la définition générale de la multiplication, que

$$\frac{ac}{bd} . \frac{a}{b} :: \frac{c}{d} . 1.$$

Si dans la proportion qu'il faut démontrer, on met à la place de la seconde fraction
* 147 $\frac{a}{b}$, celle-ci $\frac{ab}{bd}$ qui lui est égale*, il n'y aura plus qu'à faire voir que . . .

$\frac{ac}{bd} . \frac{ad}{bd} :: \frac{c}{d} . 1$; & en voici la preuve

* 160 $\frac{ac}{bd} . \frac{ad}{bd} :: ac . ad$*;

* 145 $\frac{c}{d} . 1 :: c . d$*. Or $ac . ad :: c . d$ par l'artic 87; donc

78 $\frac{ac}{bd} . \frac{ad}{bd} :: \frac{c}{d} . 1$. ce qu'il falloit démontrer.

Exemple.

Si l'on multiplie l'une par l'autre ces deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, on trouvera que leur produit est $\frac{8}{15}$.

Re-

Remarque.

Pour multiplier les unes par les autres plusieurs fractions $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{f}{g}$, il n'y a donc qu'à multiplier les uns par les autres leurs numerateurs a, c, f, ensuite leurs dénominateurs b, d, g, & écrire le premier produit acf au dessus d'une ligne & le second bdg au dessous. La fraction $\frac{acf}{bdg}$ que cette opération donnera, sera évidemment le produit des fractions proposées.

Problême.

Diviser une fraction $\frac{a}{m}$ *par une autre* $\frac{b}{m}$. CLXIII

Régle. On divisera le numerateur a de la premiére fraction $\frac{a}{m}$ par le numerateur b de la seconde $\frac{b}{m}$, & l'on aura un quotient $\frac{a}{b}$ qui sera celui de la premiére fraction $\frac{a}{m}$ divisée par la seconde $\frac{b}{m}$.

Il faut démontrer, conformément à la definition générale de la division, que

$\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b} . 1 :: \frac{a}{m} . \frac{b}{m} .$$

145 $\frac{a}{b} . 1 :: a . b$

160 $\frac{a}{m} . \frac{b}{m} :: a . b$, donc

78 $\frac{a}{b} . 1 :: \frac{a}{m} . \frac{b}{m}$. ce qu'il falloit démontrer.

Exemple.

Si l'on diviſe $\frac{6}{7}$ par $\frac{3}{7}$, on trouvera que le quotient eſt 2; Si l'on diviſe $\frac{3}{7}$ par $\frac{6}{7}$ on trouvera que le quotient eſt $\frac{3}{6} \longrightarrow \frac{1}{2}$.

Fin du troiſiéme Livre.

LIVRE IV.

Des puissances & des Racines.

SECTION I.

Où l'on explique la formation des Puissances & l'extraction des Racines.

CHAPITRE I.

De la formation des Puissances.

Avertissement.

Il faut rappeller ici l'Article 96.

Définition.

ELever une grandeur à une certaine puissance; c'est trouver cette puissance de la grandeur proposée. Par exemple, élever 5 à la 2me. puissance, c'est trouver la 2me. puissance de 5, laquelle est 25. CLXIV

Problême.

Elever une Grandeur a *à une puissance dont l'exposant soit donné.* CLXV.

Régle. S'il faut élever la gr: a à la 2me. puissance, on multipliera cette gr: a par elle même, & l'on aura un produit aa qui sera la seconde puissance de cette grandeur a.

S'il faut l'élever à la 3me. puissance, on l'élevera d'abord à la 2me, ensuite on multipliera la 2me. puissance *aa* qu'on aura trouvée, par cette même gr: *a*, & l'on aura au produit *a a a* la troisieme puissance de la gr: proposée *a*.

Av: C'est suivant cette Régle que la Table suivante à été construite.

Table des Puissances de $a + b$

1re. $a + b$

2me. $a^2 + 2ab + bb$

3me. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4me. $a^4 + 3a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

5me. $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

CHAPITRE II.

De l'extraction des Racines.

Définitions.

clxvii. LA racine 2me. d'une gr: a^2, ou sa racine du 2me. degré, ou sa racine *quarrée* (ces trois expressions sont Synonimes) c'est la gr: *a* dont celle là a^2 est la 2me. puissance. Ainsi 5 est la racine quarrée de 25, parce que $25 = 5 \times 5$.

La racine 3me. d'une gr: a^3, ou la racine du 3me. degré, ou la racine *cubique*, c'est la gr: *a* dont celle là a^3 est la 3me. puissance. Ainsi 5 est la racine cubique de 125, parce que $125 = 5 \times 5 \times 5$. Il en est de même de toutes les autres racines.

Le

Le nombre qui marque le degré d'une ra- clxvii.
cine, s'apelle l'exposant de cette racine. Ainsi 2 est l'exposant de la racine 2me; 3, celui de la racine 3me, &c.

Extraire la racine 2me. ou 3me &c. d'une gr: clxviii
a, c'est trouver cette racine de la gr: proposée *a*. Ex: extraire la racine quarrée de 25. c'est trouver la racine quarrée de 25, laquelle est 5.

Problême.

Extraire la racine 2me, ou 3me, &c. d'un nombre CLXIX
entier.

Exemples d'extractions de racines quarrées.

5	30	84	16	2304
4	. .	. .	. .	
—	. .	. .	. .	
1	30	. .	. .	
	43	. .	. .	
1	29	. .	. .	
	1	84	16	
		46	04	
	1	84	16	

12	32	08	351
9	. .	. .	
	. .	. .	
—	. .	. .	
3	32	: :	
	65	: :	
3	25	: :	
	7	08	
	7	01	
	7	01	
		7	

Définition.

On marque ainsi la racine 2me. d'une gr: *a*, $\sqrt[2]{a}$; la racine 3me, $\sqrt[3]{a}$; la racine 4me., $\sqrt[4]{a}$; &c.

Problême.

CLXX. *Extraire la racine 2me, ou 3me. &c. d'une grandeur entiére literale.*

Exemples d'extractions de racines quarrées :

$$a^2 \left\{ \mp a \right. . \qquad a^6 \left\{ \mp a^3 \right. . \qquad a^6b^4 \left\{ \mp a^3b^2 \right. .$$

$$36a^4b^2 \left\{ \mp 6a^2b \right.$$

$$\begin{array}{l} aa + 2ab + bb \left\{ + a + b \right. \\ \underline{aa \quad :} \\ 0 + 2ab + bb \\ \quad + 2a + b \\ \quad + 2ab + bb \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} aa - 2ab + bb \left\{ a - b \right. \\ \underline{aa \quad :} \\ 0 - 2ab + bb \\ \quad + 2a - b \\ \quad - 2ab + bb \\ \hline \end{array}$$

Problême.

CLXXI *Extraire la racine 2me. ou 3me. &c. d'une fraction numerique ou literale.*

$\frac{9}{16}$

$$\frac{9}{16}\left\{\frac{3}{4}\right. \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\right. \quad \frac{3}{5}\left\{\sqrt[2]{\frac{3}{5}}\right.$$

$$\frac{a^2}{b^2}\left\{\frac{a}{b}\right. \quad \frac{36a^6\,b^2}{4c^6}\left\{\frac{6a^3b}{4c^3}\right. \quad \frac{aa+2ab+bb}{aa-2ab+bb}\left\{\frac{a+b}{a-b}\right.$$

SECTION II.

Où l'on explique le Calcul des Racines.

CHAPITRE I.

Où l'on fait voir qu'elles sont les Grandeurs entieres ou rompuës, dont les racines 2mes, ou 3mes &c. sont incommensurables avec ces grandeurs.

Theorême.

Suposé qu'un nombre entier ab *premier avec un autre* mb, *contienne exactement un nombre entier* b *partie aliquote de cet autre membre* mb; *cette partie aliquote* b *est necessairement l'unité.* clxxii.

Car si *b* n'étoit pas l'unité, il est évident que *ab* ne seroit pas premier avec *mb*, comme on supose qu'il l'est.

Theorême.

Si un nombre entier ab *est premier avec un autre* mbc, *il est pareillement premier avec tout nombre entier* bc *partie aliquote de ce dernier* mbc. clxxiii

Car si la plus grande commune mesure *b* des nombres entiers *bb, bc,* laquelle est un nombre entier*, n'étoit pas l'unité, il est évident que *ab* ne seroit pas premier avec *mbc.* *133.

Theorême.

clxxiv. *Lorsque deux nombres entiers* a, b *sont premiers chacun avec un troisiéme* c, *leur produit* ab *est aussi premier avec ce nombre* c.

Il faut démontrer que la plus grande commune mesure *m* du produit *ab* & de *c*, est l'unité.

Premiérement, puisque le produit *ab* & le nombre *c*, sont des nombres entiers, leur plus grande commune mesure *m* est un nombre en-
* 133 tier*; & puisqu'elle est contenue exactement dans *a b* & dans *c*, elle est évidemment une partie aliquote de *c*.

En second lieu, puisque *m* est un nombre entier partie aliquote de *c*, & que *a*, & *b* sont premiers avec *c* par la suposition, il s'ensuit que si *a* contient exactement *m*, il faut que *m* soit l'u-
* 172 nité*. Or c'est ce que je vais démontrer.

Le nombre de fois que *ab* contient *m*, étant nommé *n*, on aura

$ab == nm$, d'où il viendra

$a . n :: m . b$. Or *b* étant premier avec *c* par la suposition, & *m* étant un nombre entier partie aliquote de *c*, comme je viens de le faire voir, il s'ensuit que *b* est pre-
* 173 mier avec *m**, par consequent
* 137 que *a* contient exactement *m**

Corollaires.

Suposé que plusieurs nombres a, b, c, d *soient premiers chacun avec un même nombre* m, *leur produit* abcd *est pareillement premier avec ce nombre* m,

Car 1ò. puisque par la suposition *a* & *b* sont pre-

premiers chacun avec *m*, il s'ensuit que *ab* est premier avec *m*. 2°. Puisque *ab* est premier avec *m*, & que par la suposition *c* l'est aussi, *abc* l'est pareillement. 3°. *abc* étant premier avec *m*, & *d* l'étant par la suposition, il en resulte que *abcd* l'est pareillement.

Suposé que plusieurs nombres a,b,c,d *soient premiers chacun avec chacun de plusieurs autres nombres* m, n, p; *le produit* abcd *de ceux là est premier avec le produit* mnp *de ceux ci.* CLXXVI.

Car *abcd* est premier avec chacun des nomnombres *m,n,p* par le Corollaire précedent. Or cela posé, il suit du même Corollaire que *mnp* est premier avec *abcd*.

Toute puissance, comme $\frac{a^3}{b^3}$ *d'un nombre rompu primitif* $\frac{a}{b}$ *est un nombre rompu primitif.* CLXXVII

Theorême.

Suposé qu'un nombre rompu primitif $\frac{A}{B}$ *ait une racine* 2me, *ou* 3me, *ou* 4me, *&c, par ex:, une racine* 3me, *son numerateur* A, *& son dénominateur* B *ont chacun en nombres entiers une telle racine.* CLXXIIX

Quelle que soit la racine 3me. de $\frac{A}{B}$, elle peut toujours être reduite en un nombre rompu primitif de la même valeur. Cela posé, que $\frac{a}{b}$ représente ce nombre rompu primitif, on aura

$\frac{A}{B} = \frac{a^3}{b^3}$. Or le nombre rompu $\frac{A}{B}$ est primitif, par la ſupoſition; & le nombre rompu $\frac{a^3}{b^3}$ l'eſt auſſi, par l'article precédent; Donc, ces deux nombres rompus ſont non ſeulement de la méme valeur, mais de plus égaux terme à terme ; c'eſt à dire que

152. $A = a^3$, & que $B = b^3$, par conſequent $\sqrt[3]{A} = a$, & $\sqrt[3]{B} = b$. Ainſi les nombres A, B ont chacun en nombres entiers une racine cubique.

Corollaires.

clxxix. *Lorſque le numerateur, & le dénominateur d'un nombre rompu primitif* $\frac{A}{B}$ *n'ont pas chacun en nombres entiers une racine 2me, ou 3me, ou 4me, &c, il n'y a aucun nombre qui ſoit une telle racine de ce nombre rompu* $\frac{A}{B}$, *ni par conſequent d'aucune autre nombre qui lui ſoit égal.*

Il n'y a donc aucun nombre qui, par ex:, ſoit la racine 2me de $\frac{2}{3}$, non plus que de $\frac{4}{3}$.

clxxx. *Lorſque un nombre entier* a *n'a pas en nombres entiers une racine 2me ou 3me, ou 4me &c, par ex: une racine 2me, il n'y a aucun nombre qui ſoit une telle raciracine de ce nombre entier* a.

Car

Car $a = \frac{a}{1}$, qui est évidemment un nombre rompu primitif. Or le numerateur a de ce nombre rompu $\frac{a}{1}$, n'aiant pas en nombres entiers une racine 2me, il n'y a aucun nombre qui soit la racine 2me de $\frac{a}{1}$, ni par consequent du nombre entier a égal à $\frac{a}{1}$. * *179.

CHAPITRE II.

Où l'on explique le Calcul des Racines.

Problême.

Reduire une gr: a en une racine de la même valeur, & dont l'exposant soit tel nombre entier m qu'on voudra. clxxxi.

Régle. Il faut élever la gr: proposée a à la puissance qui a pour exposant le nombre donné m, ensuite, écrire au devant de cette puissance; qui est a^m, le signe radical $\sqrt{}$ avec ce même exposant m. Par là on aura une racine sc: $\sqrt[m]{a^m}$, qui aura pour exposant le nombre donné m, & qui évidemment sera égale à la grandeur proposée a.

Exemple.

Qu'il faille reduire 4 en une racine de la même-

me

me valeur & qui ait pour exposant 3.

1°. J'éleve 4 à la 3me puissance, & je trouve que cette puissance est 64

2°. J'écris au devant de 64 le signe radical $\sqrt{\ }$ avec l'exposant 3, d'où il me vient $\sqrt[3]{64}$ pour la racine demandée.

Problême.

Reduire une racine $\sqrt[m]{a^m}$ *en une autre de la*
clxxxii *même valeur, & dont l'exposant* mn *soit multiple de l'exposant* m *de cette racine* $\sqrt[m]{a^m}$.

Régle. 1°. On divisera l'exposant multiple mn par l'autre m, d'où l'on aura un quotient n.

2°. On élevera la gr: a^m qui est sous le signe radical, à la puissance qui a pour exposant ce quotient n, laquelle est a^{mn}.

3°. On écrira devant cette puissance a^{mn} le signe radical $\sqrt{\ }$ avec l'exposant multiple mn, après quoi l'operation sera achevée.

C'est à dire que la racine $\sqrt[mn]{a^{mn}}$ qu'on trouvera, aura pour exposant le nombre donné mn, ce qui est bien évident; & qu'elle sera égale à la proposée $\sqrt[m]{a^m}$, ce qui est encore bien clair, puisque $\sqrt[mn]{a^{mn}} = a$, & que $\sqrt[m]{a^m} = a$.

Exem-

Exemple.

Qu'il faille reduire $\sqrt[3]{9}$ en une racine de la même valeur, & qui ait pour exposant le nombre 6 multiple de 3.

1ò. Je divise 6 par 3, & je trouve que le quotient est 2.

2ò. J'éleve 9 à la 2me puissance, & il me vient 81.

3ò. J'écris au devant de cette puissance 81 le signe radical $\sqrt{}$ avec l'exposant 6; ce qui me donne $\sqrt[6]{81}$ qui a pour exposant 6, & qui, par la démonstration précedente, est égale à $\sqrt[3]{9}$.

Problême.

Reduire plusieurs racines $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$, *en d'autres de la même valeur, & qui aient un même exposant.* clxxxiii.

Régle: 1ò. On multipliera les uns par les autres les exposans *m, n, p* des racines proposées; d'où il viendra un produit *m n p* multiple de chacun d'eux.

2ò. On reduira chacune de ces racines en une autre de la même valeur, & qui ait pour exposant ce produit *mnp**; après quoi il est évident que le Problême sera resolu. *182.

Si l'on suit cette régle à l'égard des trois racines proposées, on trouvera, $\sqrt[mnp]{a^{np}}$, $\sqrt[mnp]{b^{mp}}$, $\sqrt[mnp]{c^{mn}}$.

Régle. Lorsque le produit *mnp* des exposans

m, n, p

m, n, p des racines proposées, n'est pas leur moindre multiple, il vaut mieux prendre ce moindre multiple que ce produit *mnp*.

Problême.

clxxxiv. *Multiplier les unes par les autres deux ou plusieurs racines.* $\sqrt[m]{a^m}$, $\sqrt[m]{b^m}$ *qui ont un même exposant.*

Régle. Il faut multiplier les unes par les autres les gr: a^m, b^m qui sont sous les signes radicaux des racines proposées; & écrire au devant de leur produit $a^m b^m$ le signe radical avec l'exposant *m* commun à ces racines. Celle qu'on aura par cette opération, savoir $\sqrt[m]{a^m b^m}$ sera leur produit.

1°. $\sqrt[m]{a^m} = a$; $\sqrt[m]{b^m} = b$; Donc $\sqrt[m]{a^m} \times \sqrt[m]{b^m} = ab$

2°. $\sqrt[m]{a^m b^m} = ab$. Donc $\sqrt[m]{a^m b^m} = \sqrt[m]{a^m}$ $(\times \sqrt[m]{b^m}$

Exemple.

On propose de multiplier l'une par l'autre ces deux racines $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{4}$

1°. Je multiplie 9 par 4, & j'ai pour produit 36.

2o. J'écris au devant de ce produit le ſigne radical avec l'expoſant 3, ce qui me donne $\sqrt[3]{36}$, qui par la démonſtration précedente, eſt le produit des racines propoſées $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{4}$.

Problême.

Diviſer une racine $\sqrt[m]{a^m}$ *par un autre* $\sqrt[m]{b^m}$ *qui a le même expoſant* m. clxxxv.

Régle. On diviſera la gr: a^m qui eſt ſous le ſigne de celle là, par la grandeur b^m qui eſt ſous le ſigne de celle-ci; & l'on écrira au devant du quotient $\frac{a^m}{b^m}$, le ſigne radical avec l'expoſant commun aux deux racines; d'où il en viendra une nouvelle $\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}$ qui ſera le quotient demandé.

Il faut prouver que $\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{a^m}}{\sqrt[m]{b^m}}$

$$1^o. \sqrt[m]{a^m} = a; \sqrt[m]{b^m} = b; \text{ donc } \frac{\sqrt[m]{a^m}}{\sqrt[m]{b^m}} = \frac{a}{b}$$

$$2^o. \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{a}{b}, \text{ Donc } \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{a^m}}{\sqrt[m]{b^m}}$$

Exemple.

Je supose qu'il faille diviser $\sqrt[3]{32}$ par $\sqrt[3]{4}$
1ò. Je divise 32 par 4, & j'ai pour quotient 8.
2ò. J'écris au devant de ce quotient 8 le signe radical avec l'exposant 3; d'où j'ai $\sqrt[3]{8}$, ou 2, qui est donc le quotient demandé.

Rem. Cet exemple fait voir que des racines incommensurables avec l'unité, peuvent être commensurables entr'elles. Car puisque le quotient de $\sqrt[3]{32}$ divisée par $\sqrt[3]{4}$ est 2, il s'ensuit que $\sqrt[3]{32} \,.\, \sqrt[3]{4} :: 2.1.$ par la nature de la division.

Problême.

CLXXXVI. *Determiner si deux racines données* $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$ *qui*

qui ont un même exposant m, *sontcommensurables entr' elles, ou si elles ne le sont pas.*

Régle. On divisera l'une des deux racines proposée par l'autre, par ex: $\sqrt[m]{a}$ par $\sqrt[m]{b}$; & si le quotient $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ est une gr: commensurables avec l'untté, on conclura qu'elle sont commensurables entr'elles, puisque $\sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{\frac{a}{b}} . 1$*. Mais si le quotient $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ *101.
n'est pas tel que je viens de dire, on sera assuré par la même raison que les racines proposées $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$ sont incommensurables entr'elles.

Exemple.

Suposé qu'il faille resoudre ce Problême à l'égard des racines suivantes $\sqrt[2]{18}$, $\sqrt[2]{2}$. Je divise donc $\sqrt{18}$ par $\sqrt{2}$; & je trouve que le quotient est $\sqrt[2]{9} = 3$; d'où je conclus que $\sqrt{18} . \sqrt{2} :: 3 . 1$. par consequent que ces racines sont commensurables entr'elles,

Rem. Il paroit par cet exemple que lorsque deux racines sont commensurables entr'elles, on peut exprimer la valeur de l'une desdeux en l'autre; c'est à dire, par exemple, qu'on peut écrire au lieu de $\sqrt[2]{18}$, $3\sqrt[2]{2}$. Car puisque $\sqrt[2]{18} . \sqrt[2]{2} :: 3 . 1$, il s'ensuit que

 $\sqrt{18}$

*90. $\sqrt[2]{18} = 3\sqrt[2]{2}$ *

Problême.

clxxxvii *Plusieurs racines* $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[m]{c}$, $\sqrt[m]{d}$ *qui ont un même exposant* m, *& qui sont commensurables entr'elles, étant données, exprimer leurs valeurs en une seule d'entr'elles, par ex: en la derniére* $\sqrt[m]{d}$.

Régle. On divisera chacune de ces racines par celle en laquelle on veut exprimer leurs valeurs, savoir par $\sqrt[m]{d}$. Ensuite on multipliera cette derniére racine $\sqrt[m]{d}$, par chacun de ces quotiens f, g, h, i, en les écrivant simplement au devant d'elle, en cette sorte f $\sqrt[m]{d}$, g $\sqrt[m]{d}$, h $\sqrt[m]{d}$, i $\sqrt[m]{d}$. Ces produits seront les valeurs des racines $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[m]{c}$, $\sqrt[m]{d}$, en $\sqrt[m]{d}$. Car par la nature de la division $\sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{d} :: f . 1$;

*90. donc f $\sqrt[m]{d} = 1\sqrt[m]{a}$ *

On prouvera de la même maniére que g $\sqrt[m]{d} = \sqrt[m]{b}$; & que h $\sqrt[m]{d} = \sqrt[m]{c}$.

Exem-

Exemple.

Exprimer les valeurs de $\sqrt[2]{32}$, $\sqrt[2]{18}$, $\sqrt[2]{8}$, $\sqrt[2]{2}$ en $\sqrt[2]{2}$

1o. Je diviſe ſucceſſivement toutes ces racines par $\sqrt[2]{2}$, & je trouve pour quotiens 4, 3, 2, 1.

2o. Je multiplie ſucceſſivement $\sqrt[2]{2}$ par ces quotiens, en les écrivant ſimplement au devant d'elle, & j'ai $4\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $1\sqrt{2}$, qui ſont les valeurs demandées.

Theorême.

Toutes les racines repréſentées par $\sqrt[m]{a^m b}$ *peu-* clxxxiix
vent être reduites en celle qu'exprime $a\sqrt[m]{b}$; *c'eſt à dire que* $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$.

$a = \sqrt[m]{a^m}$; donc $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m} \times \sqrt[m]{b}$. Or

$\sqrt[m]{a^m} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$* ; donc *184.

$$a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}.$$

Theo-

Theorême.

clxxxix. *Toutes les racines représentées par* $\sqrt[mn]{a^{pm}}$ *peuvent être reduites en celle qu'exprime* $\sqrt[m]{a^{p}}$; *je veux dire que* $\sqrt[m]{a^{p}} = \sqrt[mn]{a^{pn}}$.

Si l'on reduit $\sqrt[m]{a^{p}}$ en une autre racine de la même valeur, & qui ait pour exposant *mn* multiple de *m*, on trouvera $\sqrt[mn]{a^{pn}}$. Donc $\sqrt[m]{a^{p}} = \sqrt[mn]{a^{pn}}$.

Problême.

CXC. *Ajouter ensemble plusieurs racines données qui ont un même exposant.*

Exemples.

$$+\sqrt[2]{3}$$
$$+\sqrt[2]{5}$$
$$+\sqrt[2]{6}$$

$$+\sqrt[2]{3}+\sqrt[2]{5}+\sqrt[2]{6}$$

+

$$+\sqrt[2]{2}$$
$$-\sqrt[2]{5}$$
$$+\sqrt[2]{7}$$

$$+\sqrt[2]{2}\quad-\sqrt[2]{5}\quad+\sqrt[2]{7}$$

$$+\sqrt[2]{a}$$
$$+\sqrt[2]{b}$$
$$+\sqrt[2]{c}$$

$$+\sqrt[2]{a}\quad+\sqrt[2]{b}\quad+\sqrt[2]{c}$$

$$\sqrt[2]{32} = 4\sqrt[2]{2}$$
$$\sqrt[2]{18} = 3\sqrt[2]{2}$$
$$\sqrt[2]{8} = 2\sqrt[2]{2}$$
$$\sqrt[2]{2} = 1\sqrt[2]{2}$$

$$10\sqrt[2]{2}$$

$$\sqrt[2]{a^2x} = a\sqrt[2]{x}$$

$$\sqrt[2]{b^2x} = b\sqrt[2]{x}$$

$$\sqrt[2]{c^2x} = c\sqrt[2]{x}$$

$$\sqrt[2]{x} = 1\sqrt[2]{x}$$

$$\overline{a+b+c+1}\sqrt[2]{x}$$

$$\sqrt[2]{32} = 4\sqrt[2]{2}$$

$$\sqrt[2]{2} = 1\sqrt[2]{2}$$

$$5\sqrt[2]{2}$$ *Somme particuliere.*

$$\sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{3}$$

$$\sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{5}$$

$$5\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{5}.$$ *So. totale.*

Pro-

Problême.

Soustraire une racine d'une autre qui a le même exposant. CXCI.

Exemples.

$$+\sqrt[2]{10} \qquad +\sqrt[2]{10}$$
$$+\sqrt[2]{3} \qquad -\sqrt[2]{3}$$
$$+\sqrt[2]{10} - \sqrt[2]{3} \qquad +\sqrt[2]{10} + \sqrt[2]{3}$$

$$+\sqrt[2]{a} \qquad +\sqrt[2]{a}$$
$$+\sqrt[2]{b} \qquad -\sqrt[2]{b}$$
$$+\sqrt{a} - \sqrt{b} \qquad +\sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3} \qquad \sqrt{aax} = a\sqrt{x}$$
$$\sqrt{3} = 1\sqrt{3} \qquad \sqrt{x} = 1\sqrt{x}$$
$$2\sqrt{3} \qquad \overline{a - 1}\sqrt{x}$$

Problême.

Une racine quelconque $\sqrt[m]{a^{mn}}$ *étant donnée, en extraire la racine qui a pour exposant un nombre donné* n. CXCII.

 Régle,

Régle. Il n'y a qu'à multiplier l'exposant *m* de la racine donnée $\sqrt[m]{a^{mn}}$, par l'exposant *n* de celle qu'on en veut extraire. Celle qu'on aura par là savoir $\sqrt[mn]{a^{mn}}$. sera la racine qu'il falloit trouver.

Il s'agit donc de prouver que $\sqrt[mn]{a^{mn}}$, est la racine de $\sqrt[m]{a^{mn}}$, qui a pour exposant *n*. Ce qui est bien clair puisque $\sqrt[mn]{a^{mn}} = a$, & que *a* est évidemment la racine de $\sqrt[m]{a^{mn}}$, ou a^n, qui a pour exposant *n*.

Exemple.

Qu'il faille extraire la racine 2me. de $\sqrt[3]{7}$, je multiplie donc 3 par 2, & j'ai $\sqrt[6]{7}$, qui est la racine 2me de $\sqrt[3]{7}$,

CHAPITRE III.

Des Racines imaginaires.

Theorême.

CXCIII *Une gr: negative* — a *ne peut avoir aucune racine dont l'exposant soit un nombre pair;*

Car

Car si $-a$ avoit par ex: une racine 2me, cette racine seroit une gr: positive, ou negative $\mp b$; de plus il faudroit que $-a$ fut égale à la 2me puissance de cette racine $\mp b$. Or cette 2me puissance seroit toujours une gr: positive, savoir $+bb$*, à laquelle, par consequent, la gr: negative $-a$ ne pouvant pas être égale, il s'ensuit qu'il est impossible que cette gr: negative $-a$ ait une racine 2me. *98.

On prouvera de la même maniére qu'il est impossible que $-a$ ait une racine 4me, ou 6me, ou 8me &c.

Définition.

CXCIV Lorsqu'on supose qu'une gr: negative $-a$ a une racine dont l'exposant est un nombre pair m, on donne à cette racine suposée, le nom de racine *imaginaire*, & on le marque ainsi $\sqrt[m]{-a}$.

Problême.

CXCV. *Ajouter ensemble des racines imaginaires.*

Exemples.

$$\begin{array}{ll} +\sqrt{-6} & +\sqrt{-6} \\ +\sqrt{-10} & -\sqrt{-10} \\ \hline +\sqrt{-6}+\sqrt{-10} & +\sqrt{-6}-\sqrt{-10} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} +\sqrt{-a} & +\sqrt{-a} \\ +\sqrt{-b} & +\sqrt{-b} \\ \hline +\sqrt{-a}+\sqrt{-b} & +\sqrt{-a}-\sqrt{-b} \end{array}$$

$+3\sqrt{-6}$	$+3\sqrt{-6}$
$+2\sqrt{-6}$	$+2\sqrt{-6}$
$+5\sqrt{-6}$	$+1\sqrt{-6}$

$+m\sqrt{-a}$	$+m\sqrt{-a}$
$+n\sqrt{-a}$	$-n\sqrt{-a}$
$+m+n\sqrt{-a}$	$+m-n\sqrt{-a}$

Problême.

CXCVI *Soustraire une racine imaginaire d'une autre.*

$+\sqrt[2]{-6}$	$+\sqrt[2]{-6}$
$+\sqrt[2]{-5}$	$-\sqrt[2]{-5}$
$+\sqrt[2]{-6}-\sqrt[2]{-5}$	$+\sqrt[2]{6}+\sqrt[2]{5}$

$+\sqrt[2]{-a}$	$+\sqrt[2]{-a}$
$+\sqrt[2]{-b}$	$-\sqrt[2]{-b}$
$+\sqrt[2]{-a}-\sqrt[2]{-b}$	$+\sqrt[2]{-a}+\sqrt[2]{-b}$

$$\begin{array}{ll}
+13\sqrt[2]{-6} & +13\sqrt[2]{-6} \\
+10\sqrt[2]{-6} & -10\sqrt[2]{-6} \\
\hline
+3\sqrt[2]{-6} & +23\sqrt[2]{-6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
+m\sqrt[2]{-a} & +m\sqrt[2]{-a} \\
+n\sqrt[2]{-a} & -n\sqrt[2]{-a} \\
\hline
\overline{+m-n}\sqrt[2]{-a} & \overline{+m+n}\sqrt[2]{-a}
\end{array}$$

Problême.

Multiplier une racine imaginaire par une autre. CXCVII.

Exemples.

$$\begin{array}{ll}
+\sqrt[2]{-6} & -\sqrt[2]{-6} \\
+\sqrt[2]{-5} & -\sqrt[2]{-5} \\
\hline
+\sqrt[2]{-6}\times\sqrt[2]{-5} & +\sqrt[2]{-6}\times\sqrt[2]{-5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
+\sqrt[2]{-6} & -\sqrt[2]{-6} \\
-\sqrt[2]{-5} & +\sqrt[2]{-5} \\
\hline
-\sqrt[2]{-6}\times\sqrt[2]{-5} & -\sqrt[2]{-6}\times\sqrt[2]{-5}
\end{array}$$

+

$$\begin{array}{r} +\sqrt{-6} \\ +\sqrt{-6} \\ \hline +6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\sqrt{-6} \\ -\sqrt{-6} \\ \hline +6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\sqrt{-6} \\ -\sqrt{-6} \\ \hline -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\sqrt{-6} \\ +\sqrt{-6} \\ \hline -6 \end{array}$$

Problême.

CXCVIII. *Diviser une racine imaginaire par une autre.*

Exemples.

$$\begin{array}{r} +\sqrt{-6} \\ +\sqrt{-5} \end{array} \left\{ +\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-5}} \right. \qquad \begin{array}{r} +\sqrt{-6} \\ +\sqrt{-6} \end{array} \left\{ +1 \right.$$

$$\begin{array}{r} -\sqrt{-6} \\ -\sqrt{-5} \end{array} \left\{ +\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-5}} \right. \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r} -\sqrt{-6} \\ -\sqrt{-6} \end{array} \left\{ +1 \right.$$

$$\begin{array}{r} +\sqrt{-6} \\ -\sqrt{-5} \end{array} \left\{ -\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-5}} \right. \qquad \begin{array}{r} +\sqrt{-6} \\ -\sqrt{-6} \end{array} \left\{ -1 \right.$$

$$\begin{array}{r} -\sqrt{-6} \\ +\sqrt{-5} \end{array} \left\{ -\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-5}} \right. \qquad \begin{array}{r} -\sqrt{-6} \\ +\sqrt{-6} \end{array} \left\{ -1 \right.$$

Fin du Quatriéme Livre.

LIVRE V.

Des Logarithmes.

CHAPITRE I.

Où l'on explique la Nature des Logarithmes.

Définitions.

QUand on compare une gr: à une autre en faisant attention à ce dont la premiére surpasse la seconde, ou en est surpassée, le raport qu'on découvre, s'apelle le raport *Arithmetique* de la premiére à la seconde; Celui de 6 a 4 consiste donc en ce que 6 surpasse 4 de 2. CXCIX

Lorsque tous les antecedens de plusieurs raports Arithmetiques surpassent leurs consequens, ou qu'ils en sont surpassés de la même gr: ces raports Arithmetiques sont *égaux*. Tels sont les suivans ceux de 6 à 4, de 10 à 8, de 15 à 13. CC.

Lorsque plusieurs raports Arithmetiques comme ceux de 6 à 4, de 10 à 8 sont égaux, les termes de ces raports rangés comme on les voit ici, c'ést à dire de maniére que chaque antecedent précede son consequent forment donc une *proportion Arithmetique*, ou, ce qui revient au même, sont arithmetiquement proportionnels; & on marque ainsi cette proportion 6 . 4 : 10 . 8. CCI.

Une

CCII. Une proportion, comme celle ci 10. 8 : 8. 6 : 6. 4, qui est Arithmetique ou comcette autre 1. 10 : : 10. 100 : : 100. 1000, qui est Géometrique, ou les consequens sont les mêmes que les antecedens qui les suivent, est une *Proportion continue*, ou une *Progression.*

CCIII. On exprime les Progressions d'une maniére abregée. La Progression Arithmetique 10. 8 : 8. 6 : 6. 4, se marque ainsi ÷ 10, 8, 6, 4 : La Géometrique 1. 10 : : 10. 100 : : 100. 1000 s'exprime de cette maniére ∺ 1, 10, 100, 1000.

Theorême.

CCIV. *Dans toute Proposition arithmetique de quatre termes, la somme des moïens est égale à celle des extremes.*

Si on nomme les deux antecedens a, b, les differences des deux antecedens à leurs consequens, chacune d, parce qu'elles sont égales par la suposition, ces deux consequens seront $a \mp d$, $b \mp d$; ainsi la proportion dont il s'agit sera celle ci $a . a \mp d : b . b \mp d$. Or il est bien clair que la somme $a \mp d + b$ des deux moiens de cette proportion, est égale à la somme $a + b \mp d$ des deux extrêmes.

Corollaires.

CCV. *Lorsque trois gr*, a, b, c, *sont en proportion Arithmetique continue, le double de la moienne* b *est égal à la somme des deux extrêmes.* a, c.

Car $a . b : b . c$, par la suposition ; d'ou il suit que $b + b = a + c$.

Pour

Pour trouver la quatriéme proportionnelle Arithmetique à trois gr: données a, b, c, *il n'y a donc qu'à ajouter les deux derniéres* b, c *de ces trois gr: & retrancher la premiére* a *de leur somme.* CCVI.

Pour trouver la moienne proportionnelle arithmetique entre deux gr: a, b *il n'y a non plus qu'à ajouter ces deux gr:* a, b, *& prendre la moitié de leur somme.* CCVII.

Theorême.

Une progression Géometrique ∺ . . . a, b, c, d, e, f, g, h, i, k . . . *dont deux termes* e, f, *qui se suivent ne dîférent l'un de l'autre que d'une grandeur infiniment petite par raport à chacun d'eux, étant continué à l'infini de part & d'autre de ces deux termes* c, f, *peut être considerée comme passant par tous les degrés de grandeur.* CCVIII.

1°. Puisque cette progression est continuée à l'infini de part & d'autre des deux termes *e, f*, elle va d'un coté en augmentant à l'infini, & de l'autre en diminuant à l'infini. 2°. Puisque les deux termes *e, f* qui se suivent ne different l'un de l'autre que d'une gr: infiniment petite par raport à chacun d'eux, il s'ensuit que deux autres termes quelconques consecutifs *a, b*, de cette progression ont la même proprieté, parceque *a. b* :: *e. f*, d'où il resulte que $\mp a \pm b \,.\, b$ :: $\mp e \pm f \,.\, f$. 3°. Or ces deux verités étant posées, le Theorême est évident.

Corollaire.

Tous les nombres peuvent être considerés comme des termes d'une même Progression Géometrique. CCIX.

Définition.

CCX. Supofé qu'on ait deux progreſſions,

$$\left\{ \begin{array}{l} \div \; \frac{1}{a^6} . \frac{1}{a^5} . \frac{1}{a^4} . \frac{1}{a^3} . \frac{1}{a^2} . \\ \div \; -6b. -5b. -4b. -3b. -2b. \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{a} . 1 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 .$$

$$-b . 0 . +b. +2b. +3b. +4b. +5b. +6b.$$

l'une Géometrique & dont un terme ſoit l'unité, l'autre Arithmetique écrite ſous la Géometrique, & dont le terme placé ſous le terme 1 de la progreſſion Géometrique, ſoit zero; les termes de la progreſſion arithmetique ſeront nommés les *Logarithmes* des termes correſpondans dans la progreſſion Géometrique. Ainſi $+2b$ ſera le Logarithme de a^2 & $-2b$ celui de $\frac{1}{a^2}$.

Corollaires.

CCXI. *Lorſque quatre termes de la progreſſion Géometrique par ex:* a^1, a^3, a^4, a^6, *ſont en proportion Géometrique, leurs logarithmes* 1b, 3b, 4b, 6b *ſont en proportion Arithmetique.*

NB. Les deux Corollaires ſuivans peuvent être tirés de celui ci. On peut auſſi faire de celui qu'on va voir le fondement de deux autres.

Si on

Si on ajoute ensemble les Log: de deux termes quelconques de la progr:, Géometr:, on aura le Log: de leur produit. CCXII.

Si du Log: d'un terme quelconque de la progr: Géom: on retranche celui d'un autre terme, on aura le Log: du quotient du premier terme divisé par le second. CCXIII

Suposé qu'on prenne la moitié, ou le tiers, ou le quart &c. du Log: d'un terme quelconque de la progr: Géom: par exem: du terme a^5, on aura le Log: de la racine 2me, ou 3me, ou 4me, &c. de ce terme a^5. CCXIV

Car si on considére le nombre a^5, & tous les autres de la progression Géometrique dont il s'agit comme des termes d'une autre progression Géometrique qui ait les proprietés marquées dans l'art: 208, ce qu'il est permis de suposer; * auquel cas les racines 2mes, 3mes, 4mes, &c. de tous ces nombres seront pareillement des termes de cette nouvelle progression *, on verra que a^5 étant égal à $\sqrt[2]{a^5} \times \sqrt[2]{a^5}$, à $\sqrt[3]{a^5} \times \sqrt[3]{a^5} \times \sqrt[3]{a^5}$, à $\sqrt[4]{a^5} \times \sqrt[4]{a^5} \times \sqrt[4]{a^5} \times \sqrt[4]{a^5}$, &c, il s'ensuit * que le Log: de a^5 est égal à 2fois le Log: de $\sqrt[2]{a^5}$, à 3fois le Log: de $\sqrt[3]{a^5}$, à 4fois le Log: de $\sqrt[4]{a^5}$: Par consequent que

*209. *209. *212.

le Log: de $\sqrt[2]{a^5}$ est la moitié de celui de a^5: que le Log: de $\sqrt[3]{a^5}$ en est le tiers, que celui de $\sqrt[4]{a^5}$ en est le quart &c.

CHAPITRE II.

Où l'on explique la maniére de trouver les Logarithmes des nombres.

Problême.

CCXV. *Le Logarithme d'un nombre entier quelconque diferent de l'unité, par ex: du nombre 10, étant determiné à discretion trouver ceux des autres nombres entiers.*

1°. Suposé qu'on preñe pour Log: du nombre 10, le nombre 10000000, on formera d'abord la progr: Géometr: A ∺ 1, 10, 100, 1000, &c. dont on a les deux premiers termes 1, 10, & on considérera tous ces termes avec tous les autres nombres, comme des termes d'une même progression Géometrique G qui ait les proprietés exprimées dans l'art: 208. On formera ensuite la progr. Arithm: B ÷ 0, 1000000, 2000000, &c. dont on a pareillement les deux premiers termes 0, 10000000. Il est clair que ces termes de la progr: Arithmetique seront les Log: des termes correspondans de la progr:
211. Géometrique A. Ainsi on aura déja les Log: des nombres, 1, 10, 100, 1000 &c.

2°. On cherchera de la maniére qu'on va voir,

voir, les Log: des nombres premiers absolus, c'est à dire des nombres entiers tels que 2,3,qui ne sont pas divisibles par d'autres nombres entiers moindres qu'eux, & plus grans que l'unité.

Par exem: pour trouver celui du nombre 2, on considérera que ce nombre 2 est entre les nombres connus 1, 10 de la progression Géometrique G; Ainsi après avoir reduit les nombres 1, 10 en des fractions decimales dont les denominateurs soient fort grans, par ex: en des 10000000mes, on cherchera entre ces deux nombres un moien Géometrique proportionnel *a*, (qui sera un nouveau terme connu de la progression G), & entre leurs Logarithmes 0, 10000000 un moien arithmetique proportionnel *b* dans lequel on aura le Log: de *a*. Si ce moien Géometrique proportionnel *a* se trouvoit être le nombre proposé 2, on auroit donc le Log: de 2: Mais comme il se trouvera plus que 2, on continuera de la même maniére de chercher des nombres de la progr: G qui approchent de plus en plus d'être égaux à 2,& on cherchera en même tems leurs Log: On continuera l'opération jusques à ce qu'on ait trouvé nn moien Géom: proportionnel qui soit égal à ce nombre, & le Log: de ce moïen proportionnel, après quoi on aura ce qu'il falloit trouver.

30. Pour trouver les Logar: des autres nombres entiers, il n'y aura qu'à prendre les Log: des nombres premiers absolus par la multiplication desquels ces nombres seront faits, Log: qu'on aura déja trouvés, & à les ajouter ensemble *. Par exem: pour avoir le Logarithm: de 15=3×5 on ne fera que d'ajouter ensemble *212.
ceux

ceux des nombres 3 & 5, & on aura dans leur somme le Log: de 15.

Remarque.

Ceux qui ont calculé les Tables que nous avons des Logarithmes des nombres entiers depuis l'unité jusques à 10000, ou à 100000, n'ont pas toujours suivi la methode qu'on vient de voir. Ils ont eu recours le plus souvent à des abregés dont il n'est pas necessaire que je parle ici.

Problême.

CCXVI *Trouver le Logarithme d'une Fraction.*

Toute Fraction pouvant être considérée comme le quotient du numerateur divisé par
*145. le dénominateur *, il est clair que pour trouver le Logarithme d'une Fraction, il n'y a qu'à soustraire du Log: du numerateur, celui du
*213. dénominateur *.

CHAPITRE. III.

Usages des Logarithmes.

Avertissement.

JE supose dans ce Chapitre qu'on ait une Table qui contiene les nombres entiers depuis l'unité jusques à 100000, & vis à vis leurs Logarithmes.

Problême.

CCXVII *Multiplier l'un par l'autre deux nombres entiers dont le produit soit moindre que 100000.*

On

On prendra dans la Table les log: de ces deux nombres, & on les ajoutera enſemble pour avoir le log: de leur produit *. On cherchera enſuite dans la même Table ce dernier Log:, ou celui qui en aproche le plus, & on verra vis à vis le nombre auquel il apartient, nombre qui ſera donc, du moins à peu près, ce produit qu'il falloit trouver. *212.

Problême.

Diviſer un nombre entier moindre que 100000. *par un autre nombre entier plus petit que ce premier.* CCXVIII

Après avoir pris dans la Table les Log: de ces deux nombres, on retranchera de celui du dividend celui du deviſeur, & on aura dans le reſte le log: du quotient *. Après quoi on trouvera comme auparavant le nombre auquel ce dernier Log: apartient. *213.

Problême.

Trouver la racine 2me, *ou* 3me *&c. d'un nombre entier moindre que* 100000. CCXIX.

On cherchera dans la Table le Log: de ce nombre: On en prendra la moitié, ou le tiers, &c ſuivant qu'on voudra extraire la racine 2me, ou 3me &c du nombre propoſé, & on aura le log: de la racine 2me ou 3me. &c, de ce nombre *. Après quoi on trouvera encore comme auparavant à quel nombre c'eſt que ce Logarithme apartient. *214.

Fin du Cinquiéme Livre.

LIVRE VI.

De l'Analyse.

Définition.

L'Art de résoudre les Problêmes de Mathematique par le moien de l'Algebre, se nomme *l'Analyse*.

SECTION I.

Où aprés avoir donné une idée plus étendue de l'Analyse, on explique les Préparations générales des Egalités.

CHAPITRE I.

Où l'on donne une idée plus étendue de l'Analyse.

Définitions.

*76. J'ai déja dit * que pour marquer qu'une gr: *a* est égale à une autre *b*, on écrit *a*$=$*b*; ce qu'il faut donc lire ainsi, *a est égal à b*. J'ai ajouté que la marque $=$ se nomme *le signe d'égalité*.

CCXXI Une égalité, par ex: celle ci, $x+2=7$, s'apelle aussi une *Equation*.

Les gr:, $x+2$, 7, qui sont de part & d'autre du signe d'égalité, se nomment les *membres* de l'e-

l'équation. Celle qui est à la gauche, savoir $x+2$, s'apelle le *premier* membre; & celle qui est à la droite, savoir 7, le *second*.

Avertissement.

Comme l'esprit humain remonte plus facilement du particulier au général, qu'il ne descend du général au particulier, je croi que la meilleure methode que je puisse suivre pour donner une idée générale de l'Analyse, & répandre par là plus de jour sur ce dernier Livre, c'est de commencer par résoudre analytiquement cinq ou six Problêmes de differentes sortes, en rendant raison de chaque pas que je ferai.

Problême.

Trouver un nombre tel que si on lui ajoute premiérement 6, ensuite 11, la premiére somme soit à la seconde comme 2 est à 3. CCXXII.

1°. Je m'aplique à me former une idée nette du Problême, & à me le rendre bien présent à l'esprit. Dans cette double vuë, je l'examine attentivement, & je le repete plus d'une fois.

2°. Je me dis à moi-même, combien y a-t-il ici de nombres que je connois, & combien y en a-t-il qui me sont inconus. Je vois qu'il n'y en a qu'un seul de la derniére sorte, savoir le nombre que je cherche; & je le marque par la letre x: Je vois encore qu'il y en a quatre de la premiére sorte, savoir 6, 11, 2, 3, que j'exprimerai simplement de cette maniére, quoique je pusse les marquer aussi par des letres de l'Alphabet.

3°. Comme l'égalité est le plus simple de tous

les raports, je tache d'en tirer une du Problême que je me propose. Pour cela, je fais d'abord les opérations, & je marque la proportion dont il y est parlé. C'est à dire, j'ajoute successivement les nombres 6, 11, que je connois, au nombre x que je cherche, ce qui me donne les deux sommes $x+6$, $x+11$, dont la premiére doit être à la seconde comme 2 est à 3; & j'écris $x+6 . x+11 :: 2 . 3$. Après quoi multipliant les extrêmes & les moïens de cette proportion, j'en déduis l'égalité suivante, que j'apelle *l'Equation du Problême.*

$3x+18 = 2x+22$. 4°. Maintenant, je considére que si le nombre x que je cherche, étoit seul dans le premier membre de cette équation, & qu'il n'y eût dans le second membre qu'un nombre que je connusse, ce nombre x cesseroit par la même de m'être inconnu; ainsi, je m'aplique à tirer une pareille équation de celle du Problême. Dans ce dessein je retranche $2x$ de chaqne membre de cette derniére équation, & il me reste . .

$x+18 = 22$; Après quoi je retranche encore de part & d'autre le nombre 18, & je trouve que . . . .

$x = 4$.

Pro-

Problême.

Trouver un nombre tel que si on en retranche 8, le reste soit à ce nombre qu'il faut trouver, comme ce même nombre est à 50. CCXXIII

1°. Après avoir observé les deux premiéres maximes que j'ai indiquées dans la solution précedente, & nommé le nombre qu'on cherche x, on suivra la troisiéme maxime; c'est à dire, on tachera de tirer une égalité du Problême. Ainsi, on retranchera 8 de x, & on aura $x-8$; après quoi on exprimera la proportion dont il s'agit, en écrivant $x-8.\ x :: x.\ 50$; d'où l'on conclura, en multipliant les moïens & les extrêmes, que . . .

$$xx = 50x - 400\ .$$

2°. Pour trouver la valeur de x, on retranchera $50x$ de part & d'autre, afin qu'il n'y ait point d'x dans le second membre, d'où il resultera que

$$xx - 50x = -400\ .$$

On remarquera que s'il y avoit dans le premier membre de cette équation le quarré 625 de la moitié 25 du nombre 50 par lequel x se trouve multiplié dans le premier membre, on pourroit extraire la racine quarrée de ce nombre là, & par consequent faire ensorte que x n'y fût qu'au premier degré.

degré. On ajoutera donc 625 de part & d'autre, & l'on aura

$xx - 50x + 625 = 225$; on prendra ensuite la racine quarrée de chaque membre, ce qui donnera la nouvelle équation

$x - 25 = \pm 15$. Enfin on ajoutera 25 de part & d'autre, & l'on trouvera que

$x = 25 \pm 15 = \pm^{40}_{10}$.

Problême.

CCXXIV. *Trouver deux nombres inégaux dont la somme soit 105, & la difference 63.*

1°. Ayant encore observé les deux premiéres maximes indiquées dans la solution du premier Problême de ce Chapitre, & nommé le moindre des deux nombres que je cherche, x, le plus grand y, je vois naitre de mon Problême les deux équations suivantes

$$\begin{cases} x + y = 105 \\ y - x = 63 \end{cases}$$

2°. Je fais encore cette réflexion, que si le nombre x que je cherche, étoit seul dans le premier membre de l'une de ces équations, & qu'il n'y eût dans le second qu'un membre que je connusse, ce nombre x me seroit connu, & qu'il en est de même du nombre y. Je m'a-

m'aplique donc à déduire deux pareilles équations de celles du Probléme. Dans cette vûe, je choisis à discretion la seconde, & je la distingue de l'autre par une étoile, pour me ressouvenir dans la suite que c'est l'équation dont je me serai servi; je conclus de cette équation, en ajoutant de part & d'autre x, afin que y reste seule dans le premier membre, que

$y = 63 + x$; égalité que j'appellerai l'équation *mise à part*. Après cette opération, je vois que si je connois une fois x, je connoitrai par là même y; & que par tout ou y se trouve, je puis mettre à sa place $63 + x$. Ainsi, j'écris une seconde fois celle des équations du Probléme qui n'a point d'étoile, c'est à dire, la premiére, en y substituant $63 + x$ au lieu de y, & j'ai

$2x + 63 = 105$. 3°. Maintenant, pour trouver la valeur de x, je retranche d'abord 63 de part & d'autre, & il me reste $2x = 42$;

je divise ensuite les deux membres par le nombre 2 & je trouve que

$x = 21$,

$x = 21$. Pour avoir la valeur de y, je ne fais que remonter à l'équation mise à part, & substituer 21 à la place de x, d'où il me vient enfin

$y = 84$.

Définition.

CCXXV. Faire en sorte qu'une inconnue d'une équation reste seule dans l'un des deux membres, c'est *dégager* cette inconnue.

Problême.

CCXXVI. *Trouver trois nombres tels que la somme du premier & du second soit* 100; *celle du second & du troisiéme* 150; *& celle du premier & du troisiéme* 110.

1°. Aiant nommé le 1er. de ces trois nombres, x; le 2me. y; & le 3me. z, le Problême me donne les trois équations suivantes, que j'apellerai, non seulement les équations du Problême, mais encore les *premiéres* équations.

*

$x + y = 100$

$y + z = 150$

$x + z = 110$

2°. Pour découvrir quels sont les nombres, x, y, z que je cherche, je choisis à volonté la 1ere. équation; je dégage x, en rétranchant y de part & d'autre, & je trouve

$x = 100 - y$; C'est la premiére équation mise à part. J'écris ensuite celles des premiéres équa-

quations dont je ne me ſuis pas ſervi, je les écris une ſeconde fois en ſubſtituant $100 - y$ à la place de x dans celle ou x ſe trouve ; & j'ai parlà les *ſecondes* équations, . .

$$\begin{cases} y + z = 150 \\ 100 - y + z = 110. \end{cases}$$

3°. Je choiſis encore la premiére de ces nouvelles équations ; je dégage y en retranchant z de part & d'autre, & j'ai l'équation ſuivante, qui eſt donc la ſeconde équation miſe à part . .

$y = 150 - z$; je ſubſtitue $150 - z$ à la place d'y dans celle des deux mêmes nouvelles équations dont je ne me ſuis pas ſervi, & je trouve pour troiſiéme équation,

$2z - 50 = 110$. 4°. Préſentement, pour avoir la valeur de z, j'ajoute 50 de part & d'autre, ce qui me donne $2z = 160$, je diviſe les deux membres par le nombre 2, & je découvre que

$z = 80$. Pour trouver les valeurs des nombres x, y, je remonte ſucceſſivement aux équations miſes à part. Je ſubſtitue dans la derniére 80 à la place de z,

$y = 70$. de z, ce qui me donne . Je remonte ensuite à la premiére équation mise à part, j'y substitue 70 à la place de y, & je trouve . . . .

$x = 30$.

Problême.

CCXXVII *Trouver trois nombres* x, y, z, *qui aient les proprietés exprimées par ces trois équations.*

$xx = x + yy - y$,

$xx + x - yy - y = 4$.

$y^3 + z^3 = 1$.

10. La Methode que j'ai suivie dans les solutions des deux Problêmes précédens, jetteroit ici dans des longueurs qu'on peut éviter en s'écartant un peu de cette Méthode. Au lieu de n'emploier que la premiére ou la seconde équation pour avoir la valeur de x, on les emploiera toutes deux de cette maniére. On prendra dans la premiére équation la valeur de xx, savoir $x + yy - y$; on substituera cette valeur à la place de xx dans la seconde équation & on trouvera $2x - 2y = 4$, équation où l'inconnue x n'est élevée qu'à la premiere

miére puissance, & d'où, par consequent, on aura sans peine la valeur de cette inconnue. Pour cet effet on ajoutera $2y$ de part & d'autre, ce qui donnera $2x = 2y + 4$; après quoi on divisera les deux membres par le nombre 2, d'ou il resultera l'égalité .

$x = y + 2$. laquelle, par consequent, est la premiére équation mise à part.

La valeur de x aiant été ainsi trouvée, on écrira une seconde fois celle qu'on voudra des deux équations du Problême qui ont donné cette valeur, par exemple la seconde, en y substituant $y + 2$ à la place de x, & on aura $yy + 4y + 4 + y + 2 - yy - y = 4$, c'est à dire

$4y + 6 = 4$: On y ajoutera la derniére équation du Probléme, savoit . . . . .

$y^3 + z^3 = 1$, laquelle ne contient pas le nombre inconnu x; & on aura, dans l'une & dans l'autre les secondes équations.

2o. La premiére, si on retranche 6 de part & d'autre, & qu'ensuite on divise par 4, donnera la

seconde équation mise à part . . . .

$y = -\frac{1}{2}$; valeur qui étant substituée à la place de y dans la derniére de ces secondes équations donnera la troisiéme . . .

$\left\{ -\frac{1}{8} + z^3 = 1\right.$. 3o. Pour trouver la valeur de z, on ajoutera $\frac{1}{8}$ de part & d'autre, & on aura $z^3 = \frac{9}{8}$; d'ou l'on conclura que . . .

$z = \sqrt[3]{\frac{9}{8}}$. Pour avoir les valeurs de y, & de x, on remontera par ordre aux équations mises à part, on verra que la seconde étant . .

$y = -\frac{1}{2}$, il n'est pas necessaire d'y rien substituer; mais qu'il faut mettre $\frac{1}{2}$ à la place de y dans la premiére, d'ou l'on aura . . .

$y = \frac{1}{2}$.

Régles générales

De Analyse.

CCXXVIII *Premiére Régle.* Il faut s'apliquer à bien comprendre la question qu'on se propose de résoudre, & à se la rendre trés familiére.

Rém: Rien n'est plus ordinaire aux Commençans que de s'écarter de cette Maxime.

CCXXIX. *Seconde Régle.* Il faut distinguer avec soin les gr: connues, & les gr: inconnues que la question renferme. On marquera les gr: inconnues par les derniéres letres de l'Alphabet, & les gr: connues par les premiéres.

Rem:

Rem: Un moïen aiſé de ſoulager ici la Mémoire, c'eſt de marquer les unes & les autres, ou du moins une partie, par les premiéres lettres des noms qu'elles portent. Par ex:, on peut apeller un tems, *t*; une viteſſe, *v*; une longueur, *l*; &c.

Rem: Lorſquue les gr: connues ſont des nombres déterminés, ou qu'on peut les exprimer par de tels nombres, il eſt bien ſouvent plus avantageux d'emploier les chifres pour les marquer, que les lettres de l'Alphabet.

Définition.

Il arrive ordinairement qu'entre les gr: inconnues il y en a qu'on introduit dans le calcul qu'afin, de trouver les autres par leur moïen avec plus de facilité : Alors celle ci ſont les inconnues *principales*; & celles là les *ſupoſées*. CCXXX.

Troiſiéme Régle. Il faut parcourir attentivement toutes les conditions du Problême, & former par leur moïen autant d'égalités que le Problême contient d'inconnues; égalités qui ſeront nommées *les équations du Problême*, ou *les premiéres équations.* CCXXXI.

Rem. Il peut arriver que les conditions du Problême ne permettent pas de trouver un auſſi grand nombre d'égalités, ou qu'elles en donnent plus. Dans le premier cas, les gr: qu'on cherce, ou du moins une partie, ſont toujours indéterminées. Dans le ſecond, au contraire, elles ſont ſouvent impoſſibles. On verra ci après les fondemens de ces deux conſéquences. Au reſte je ſupoſe dans les deux régles ſuivantes, que le Problême donne autant d'équations qu'il contient d'inconnues.

Quatriéme Régle. Si le Problême ne fournit qu'une égalité, on cherchera la valeur de l'inconnue qu'elle contient; * après quoi le Proalême ſera reſolu. CCXXXII *246, 275, 277 278.

Cinquiéme Régle. Si le Problême donne pluſieurs égalités, 1o. On en choiſira une qu'on diſtinguera des autres par quelque marque; afin de pouvoir dans CCXXXIII

la suite se ressouvenir plus facilement que c'est l'équation qu'on aura déja emploiée ; & on prendra la
*246, valeur de l'une de ses inconnues *. Ou bien, si on
275, 277 le juge plus à propos, entre les équations du Problê-
278. me on en choisira deux qui contiennent une même inconnue ; on les distinguera pareillement des autres par quelque marque ; & on cherchera, en les y faisant servir toutes deux, la valeur de l'inconnue
*248. qui leur est commune *. L'égalité à laquelle on arrivera de l'une ou de l'autre maniére, je l'apellerai la premiére équation *mise à part*. Ensuite ; on écrira une seconde fois toutes les équations du Problême, excepté celle, ou l'une de celles dont on se sera servi pour trouver la valeur d'une inconnue, on les écrira, disje, en y substituant cette valeur à la place de l'inconnue, par tout où on la verra ; après quoi on aura les *secondes équations*. 2o. On opérera sur les secondes équations comme on aura fait sur les premiéres, & on continuera jusques à ce qu'on soit arrivé à la derniére équation, où il ne restera qu'une seule inconnue. 3o. Pour achever de resoudre le Problême, on prendra la valeur de cette inconnue, ensuite on remontera successivement aux équations mises à part, & on y substituera les valeurs des inconnues qu'on verra dans leurs seconds membres.

CHAPITRE II.

Où l'on explique les préparations générales des Egalités.

Problême.

CCXXXIV *Faire passer une grandeur d'un membre d'une égalité dans l'autre.*

Soit, par exemple, l'égalité . . . .
$x \mp b = a$, & qu'on veuille faire passer la gr: $\mp b$ du premier membre dans le second. On ajoutera de

de part & d'autre la gr: opoſée $\mp b$, & on aura

$x \pm b \mp b = a \mp b$, c'eſt à dire

$x = a \mp b$.

Régle. Il faut éfacer cette gr: dans le membre ou elle eſt, & ajouter la gr: opoſé avec l'autre membre.

Problême.

Réduire le ſecond membre d'une égalité à zero. CCXXXV.

Soit l'égalité . . . .

$x = + a - b$. On ajoutera de part & d'autre les gr: $-a$, $+b$, qui ſont les opoſées de celles du ſecond membre, & on trouvera . . .

$x - a + b = a - b - a + b$; par conſequent

$x - a + b = 0$.

Régle. Il n'y a qu'à éfacer toutes les gr. du ſecond membre, & aprés avoir écrit zero à leur place, ajouter les gr: opoſées avec le premier membre.

Problême.

Abreger une égalité où il y a des gr: ſemblables, ou des racines commenſurables. CCXXXVI

Soit l'équation . . ,

$x + 5a - 3a = b$, dans la premier membre de laquelle il y a les gr: ſemblables $+5a$, $-3a$. On les joindra enſemble & on aura . .

$x + 2a = b$

Soit l'équation

$x+3a = 5a+b$, dont les deux membres contiennent les gr: semblables $+5a$, $+3a$. Il faut faire passer l'une des deux, par ex: $3a$, dans le membre de l'autre, ce qui donnera

$x = 2a + b$.

Si l'on avoit l'équation . . .

$x+5\sqrt{a} - 3\sqrt[2]{a} = b$, on en concluroit de la même maniére que . .

$x + 2\sqrt{a} = b$

Régle. Si les gr: semblables, ou les racines, sont dans un même membre, on les ajoutera ensemble suivant les régles des Livres précédens. Si elles ne sont pas dans un même membre, on les y fera passer, après quoi on abregera ce membre là de la maniére que je viens de marquer.

Problême.

CCXXXVII *Oter les fractions d'une égalité.*

Soit l'équation . . .

$\frac{x}{a} + \frac{b}{c} = +d + f$, dont il faille oter les fractions. Je reduis toutes les gr: qu'elle contient, en des fractions qui aient un même dénominateur, & j'ajoute ensemble celles de chaque membre, ce qui me donne . . .

$\frac{cx + ab}{ac} = \frac{acd + acf}{ac}$; d'où je conclus, en éfacant le dénomina-

nateur commun, que.

$cx + ab = acd + acf$ *. *160.

Régle. On reduira toutes les gr: de l'égalité en des fractions qui aient un même dénominateur, & on ajoutera ensemble celles de chaque membre; aprés quoi il n'y aura plus qu'a effacer leur commun dénominateur.

Avertissement.

Les égalités dont je parle dans les définitions qu'on va lire, ce sont des égalités dans lesquelles il n'y a ni fractions, ni incommensurables. On verra bientôt comment il faut donner la derniére de ces deux conditions à une égalité qui ne l'a pas.

Définitions.

Ordonner une équation, c'est 1°. faire passer toutes les gr: du second membre dans le premier, suposé que le second membre ne soit pas déja zero; 2°. écrire toutes les gr: qui forment le premier membre ainsi changé, de maniére que celle où l'inconnue se trouve élevée à la plus haute puissance, soit la premiére; que celle où elle est elevée à la plus haute puissance après celle là soit la seconde, & ainsi de suite jusques à la gr: qui ne la contient pas, s'il y en a une telle, & qui par conséquent doit être écrite de la derniére. Ces deux égalités ci, par ex:, sont donc ordonnées, $x^3 + axx + bx - c = 0$, $x^3 - bx - g = 0$. ccxxxIIX

Le dernier membre de l'égalité aiant été reduit à zero, s'il y a dans le premier membre plusieurs gr: qui contiennent une même puissance de l'inconnue, ou dans lesquelles l'inconnue

nue ne ſe trouve pas, on les place ordinairement les unes ſous les autres. Par exemple, au lieu de $axx + bxx + c - f = 0$, on écrit

$$\begin{matrix} +axx+c \\ +bxx-f \end{matrix} = 0$$

CCXXXIX Les gr: d'une égalité dont le ſecond membre eſt zero, qui contiennent une même puiſſance de l'inconnue, s'apellent un *terme* de l'égalité; On donne encore ce nom aux gr: qui ne contiennent pas l'inconnue. Ainſi les gr: $+axx + bxx$, $+c+f$ ſont deux termes de l'égalité précédente.

Le terme ou l'inconnue ſe trouve elevée à la plus haute puiſſance eſt nommé le *premier* terme; celui ou elle eſt élevée à une puiſſance moindre d'un degré, s'apelle le *ſecond*, & ainſi de ſuite juſques à celui qui ne la contient pas, & qui ſe nomme toujours le *dernier* terme de l'égalité. Dans celle ci, par ex: $x^3 + ax^2 + bx - c = 0$, x^3 eſt le premier terme; $+ax^2$, le ſecond; $+bx$, le troiſiéme; $-c$, le dernier. Dans cette autre $x^3 + bx - d = 0$, x^3 eſt le premier terme; $+bx$, le troiſiéme; & $-d$, le dernier.

Lors qu'une égalité ne contient pas un certain terme, par ex:, le troiſiéme, ou le quatriéme, on dit que ce terme *manque* dans l'égalité, ou qu'il eſt *évanouï*. Sur ce pied là, le ſecond terme manque dans l'égalité $x^3 + bx - d = 0$.

CCXL, Les gr: connues qui multiplient l'inconnue dans les termes où elle ſe rencontre, ſont les *coëficiens* de ces termes. Dans l'égalité $ax^3 + bx^2 - cx^2 + g = 0$, le coëficient du premier terme eſt donc a; & celui du ſecond eſt $b - c$.

CCXLI Une égalité eſt dite du même dégré que celui de la plus haute puiſſance à laquelle ſon incon-

connue ſe trouve élevée. On dira, par ex:, que l'égalité $xx - ax - b = 0$, eſt du ſecond dégre; que celle ci $yyy + ay = b$, eſt du troiſiéme.

Une égalité du premier degré s'apelle auſſi une équation *ſimple*. Une égalité du ſecond dégre, ou du troiſiéme, ou de quelque autre dégré encore plus élevé, ſe nomme en général une égalité *composée*.

Problême.

Rendre poſitif le premier terme d'une équation, ſupoſé qu'il ne le ſoit pas. CCXLII

Soit propoſée l'équation . . .
$-yyy + ay - b = 0$. On changera les ſignes des gr: qu'elle contient, & on aura.
$+yyy - ay + b = 0$.

Régle. Il n'y a qu'a changer les ſignes des gr: dont l'équation eſt composée.

Theoréme.

Lorſque le ſecond membre d'une équation eſt zero, CCXLIII
1ò. *Si on multiplie le premier membre par une gr: quelconque poſitive ou négative, ou même composée de gr: qui ſe détruiſent, le produit ſera égal à zero.* 2ò. *Si on le diviſe par une gr: quelconque poſitive ou négative, le quotient aura auſſi la même proprieté.* 3ò. *Si on en prend la racine* 2me, *ou* 3me, *&c, cette racine ſera encore égale à zero.*

Il eſt bien évident qu'on peut repréſenter une pareille équation par la ſuivante . . .
$+x - x = 0$; une gr: quelconque poſitive ou négative, par y; & une gr: composée de gr: particulie-

res qui ſe détruiſent, par $y-y$. Cela poſé, il eſt clair 1ò. que ſi l'on multiplie $x-x=0$ par y, ou par $y-y$, on aura

$+xy-xy=0$

$+xy-xy+xy-xy=0$; 2ò. que ſi on diviſe $x-x$ par y, il en réſultera

$+\frac{x}{y}-\frac{x}{y}=0$; 3ò, que ſi on prend la racine 2me ou 3me, par ex: la 3me, de $x-x$, on aura . . .

$\sqrt[3]{x-x}=0$; Car ſi $\sqrt[3]{x-x}$ étoit une gr: poſitive, ou négative, ſon cube $x-x$ ſeroit pareillement poſitif ou négatif.

Problême.

CCXLIV. *Faire enſorte que le premier terme d'une équation ait pour coëficient l'unité, ſupoſé qu'il en ait un autre.*

Soit l'équation.

$axxx-ax-b=0$; je deviſe ſon premier membre par a, & je trouve

$xxx-x-\frac{b}{a}=0$.

Régle. Il faut diviſer toutes les gr: de l'équation par le coëficient qu'on ſe propoſe de changer.

Problême.

CCXLV *Supoſé que le ſecond membre d'une équation ſoit zero, & qu'on puiſſe prendre la racine, 2me, ou 3me, &c, du pre-*

premier membre, ſans qu'il ſoit neceſſaire pour cela d'y rien ajouter, ou bien après y avoir ajouté une gr: connue; on propoſe d'abaiſſer cette équation, c'eſt à dire d'en tirer une autre d'un moindre degré

Soit l'équation . . .

$xx + 6ax + aa = 0$. Je tache de trouver la racine quarrée du premier membre, & je découvre qu'il faudroit pour cela que le dernier terme fut $+ 9aa$, au lieu que c'eſt $1aa$. Pour le rendre tel, j'ajoute donc $8aa$ de part & d'autre, ce qui me donne . .

$xx + 6ax + 9aa = 8aa$; d'ou je conclus en prenant les racines quarrées, que . .

$x + 3a = \pm \sqrt{8aa}$.

Régle. Il faut eſſaier d'extraire la racine 2me, 3me, &c, du premier membre de l'équation; & au cas qu'on la trouve, il n'y aura qu'a la ſupoſer égale à zero *. Mais ſi on voit qu'afin de pouvoir la trouver, il faille ajouter au premier membre une certaine gr: connue, on ajoutera cette gr: à l'un & à l'autre membre; après quoi on prendra leurs racines 2mes, ou 3mes, &c, ſuivant l'expoſant de celle qu'on aura taché d'extraire, & on conclura qu'elles ſont égales. *243.

Problême.

Trouver la valeur de l'inconnue d'une équation ſimple. CCXLVI.

Soit propoſée l'équation . . .

$+ax - c = 0$. On fera passer $-c+d$ dans
$-bx+d$ le second membre, & on aura . . -

$+ax - bx = +c - d$; ensuite on divisera l'un & l'autre membre par $a-b$, ce qui donnera . .

$$x = \frac{c-d}{a-b}$$

Après avoir fait passer toutes les gr: connues dans le second membre, il faut diviser l'équation par le coëficient du premier terme.

Corollaire.

CCXLVII. *L'inconnue d'une équation simple n'a qu'une valeur; c'est à dire qu'elle n'y représente qu'une grandeur déterminée par raport aux autres.*

Définition.

La valeur de l'inconnue d'une équation simple se nomme la *racine* de cette équation. Ainsi, la racine de l'équation $ax = b$, c'est $\frac{b}{a}$.

Problême.

CCXLVIII *Deux équations qui contiennent une même inconnue étant données, trouver la valeur de cette inconnue.*

Soient proposées les deux équations suivantes A, B . . . .

A. . . $xxx - 2x^2 + 4x - 8 = 0$
B. . . $xx - 4x + 4 = 0$. 1°. Je cherche par leur

leur moïen une troisiéme équation C qui soit d'un degré inferieur à celui de l'équation B. Pour cela, j'opere de cette maniére. Je fais passer toutes les autres gr: de l'équation B, que le premier terme, dans le second membre, ce qui me donne

M . . . $xx = 4x - 4$. Je multiplie cette équation par x afin de l'élever au même dégré que A, & j'ai

N . . $xxx = 4xx - 4x$. Je substitue $4xx - 4x$ à la place de xxx dans l'équation A, qui par là se change en celle ci . . .

O . . . $2xx - 8 = 0$. Pour abaisser cette derniére équation, je me sers encore de celle que j'ai tirée de l'équation B, savoir de $xx = 4x - 4$. Je la multiplie par 2 afinque son premier terme xx ait le même coëficient que celui du premier terme $2xx$ de la derniére équation, & j'ai . . .

$2xx = 8x - 8$; aprés quoi je substitue $8x - 8$ à la place de $2xx$ dans l'équation que je veux abaisser, ce qui me donne

C . . . $8x - 16 = 0$. 2o. Maintenant, puisque l'équation C n'est que du premier dégré, il n'y a plus qu'a

qu'a chercher la valeur de son inconnue par la régle du Probléme précédent, & on trouvera $x = 2$.

Dans la Régle suivante, je donne le nom de premiére équation à celle des deux proposées qui est du plus haut dégré, & celui de seconde équation à l'autre. Si elles sont du même dégré, on entendra l'une des deux, il n'importe quelle, par la premiére équation, & l'autre par la seconde.

Régle. 1o. On prendra la valeur du premier terme de la seconde équation B, en faisant passer tous les autres dans le second membre; & on aura par là une équation que j'apelle M. On élévera M au même dégré que B, en multipliant toutes les gr: de M par la 1re. puissance de son inconnue, ou par la 2me, ou par la 3me, &c, suivant la diférence des dégrés; je nomme N l'équation qu'on trouvera. Ensuite, si les coëficiens des premiers termes des équations A, N, sont les mêmes, il faut substituer dans la 1ére A, à la place de son premier terme, la valeur qu'on en aura dans la derniére N. Mais suposé que ces coëficiens ne soient pas les mêmes, on les rendra tels en multipliant chacun des deux équations A, N par le coëficient de l'autre; après quoi on opérera sur les nouvelles équations comme on auroit fait sans cela sur les deux A, N. Dans l'un & l'autre cas, l'équation A se trouvera reduite en une autre O d'un moindre dégré que A. On abaissera de la même maniére l'équation O par le moien de M, & l'on continuera l'opération jusques à ce qu'on soit arrivé à une équation C d'un moindre dégré que B.

2o. Il faut prendre les équations B, C, & réduire B par le moien de C, suivant ce premier article de la Régle, à une équation D d'un moindre dégré que C.

3o. Il faut faire la même chose à l'égard des équations C, D; & pousse l'opération jusques à ce qu'on soit parvenu à une équation G du premier dégré.

4o. On

4o. On prendra la valeur de l'inconnue de l'équation G*; après quoi le Problême sera résolu.

Remarque.

S'il arrive que la plus simple équation qu'on puisse trouver par la Méthode précédente, soit une équation composée, il faut chercher la valeur de son inconnue par les Méthodes dont je parlerai dans la suite.

Problême.

Délivrer une équation des incommensurables. CCXLIX.

Soit proposée en premier lieu l'équation, $x+\sqrt{a^2+xx}-a=0$, dans laquelle il n'y a qu'une incommensurable simple, c'est à dire une incommensurable dont le signe radical ne renferme sous soi aucun autre semblable signe. Je fais passer $x-a$ dans le second membre, afin que l'incommensurable soit seule dans le premier, ce qui me donne

$\sqrt{a^2+x^2}=a-x$; d'où je conclus, en élevant chaque membre à la seconde puissance, que

$aa+xx=aa-2ax+xx$.

Soit proposée en second lieu l'équation

$x-$

$x - \sqrt[3]{a} - \sqrt[2]{b} = 0$, dans laquelle il y a deux incommensurables simples. 1°. Je supose pour résoudre le Problême que $\sqrt[3]{a} = y$, & que $\sqrt[2]{b} = z$; après quoi je substitue dans l'équation proposée, les letres y, z à la place des racines qu'elles representent, ce qui me donne la premiére des trois équations suivantes . .

$$\begin{cases} x - y - z = 0 : \\ yyy = a \\ zz = b \end{cases}$$

J'ai les deux autres en délivrant des incommensurables les équations que j'ai suposées. 2°. Je reduis ces trois équations à une seule ou des trois inconnues x, y, z il ne reste que la
233. premiére x, & il me vient . . .

$$x^6 - 3bx^4 - 2ax^3 + 3b^2x^2 - 6abx + aa - b^3 = 0.$$

Régle. Premier cas. Lorsque l'équation proposée M ne renferme qu'une incommensurable simple. Il faut faire ensorte que cette incommensurable soit seu-
*234. le dans l'un des deux membres *; ensuite on élévera chaque membre à la puissance qui a pour exposant celui de la racine.

Second cas. Lorsque l'équation M contient seulement plusieurs incommensurables simples. 1°. On les suposera égales à un pareil nombre de nouvelles inconnues. On introduira ces nouvelles inconnues à leur

à leur place dans l'équation M, qu'on délivrera par là de ses racines : On ôtera pareillement les incommensurables des équations suposées, en élevant les deux membres de chaque équation à la puissance marquée par l'exposant de sa racine, après quoi on aura en tout, autant d'équations sans incommensurables que d'inconnues. 2ò. On reduira toutes ces équations à une seule où il n'y ait aucune autre inconnue que celle de l'équation proposée *. *233.

Troisiéme cas; Lors qu'il y a dans l'équation M, des incommensurables composées. Il faut suivre la même Méthode que dans le second cas, excepté seulement, que pour ôter ces incommensurables des équations suposées qui les contiendront, il faut considerer chaque opération particuliére qu'on devra faire, comme une opération principale, & la ramener aux deux premiers articles de la Régle.

SECTION II.

Où l'on explique la nature des équations composées, & leurs transformations.

Avertissement.

JE supose dans cette Section & dans les suivantes, que les équations dont j'y parle, ont les conditions que je vais marquer; 1ò. que leurs seconds membres sont zero; 2ò. qu'elles ne renferment ni fractions, ni incommensurables; 3ò. que leurs premiers termes n'ont pas d'autres coëficiens que l'unité; 4ò. que ces mêmes termes sont precedés du signe +.

Lorsque le premier terme d'une équation

dans laquelle il n'y a ni fractions ni incommensurables, a pour coëficient une gr: differente de l'unité, on peut toujours, comme on le verra dans la suite, changer cette équation en une autre qui ne contienne pareillement ni fractions, ni incommensurables, & dont le premier terme n'ait que l'unité pour coëficient.

CHAPITRE I.

De la nature des Equations composées.

Remarques.

IL n'est pas rare que des gr: diférentes aient néanmoins une même proprieté. Je n'ajouterai qn'n seul exemple à ceux qu'on en a déja vûs dans les articles 98, 99, 223 : Quel des trois nombres $+2$, $+3$, -5, qu'on prenne, on trouvera toujours, si on en fait le calcul, que son cube, moins 19 fois ce même nombre, plus 30, est égal à zero.

Lorsque des gr: diférentes ont une même proprieté qu'on veut exprimer algebraïquement, on peut les marquer par la même letre, afin de répresenter sous une seule expression la proprieté qui leur est commune: Ainsi, on peut apeller les nombres $+2$, $+3$, -5, chacun en particulier, x; & ils donneront également $xxx - 19x + 30 = 0$.

La letre inconnue d'une équation représente non senlement la gr: particuliére qu'on peut avoir marqué pas cette letre, & dont l'équation exprime la nature, mais encore toutes les autres gr: qui peuvent être revêtues de la même proprieté. Si, par ex:, j'ai découvert qu'un certain

tain nombre qui m'eſt inconnu, & que j'apelle x, a la proprieté qu'exprime cette équation $xxx - 19x + 30 = 0$; je dois entendre par la letre x, non ſeulement le nombre déterminé dont je lui ai attaché l'idée, mais encore tous les autres nombres qu'il peut y avoir, qui étant ſubſtitués à la place de x dans cette équation, font que toutes les gr: qu'elle contient ſe détruiſent.

Lorſqu'on multiplie les unes par les autres, pluſieurs équations come $x-a=0$, $x-b=0$, ou les gr: inconnues ſont exprimées par une même letre, c'eſt toujours en conſiderant cette letre comme repréſentant dans chacune de ſes équations une même valeur qu'elle ait dans quelcune en particulier, par ex: la valeur $+a$ qu'elle a dans la premiére $x - a = 0$.

Theorême.

Supoſé qu'on ait pluſieurs équations dont une même letre x *repréſente les gr: inconnues, par ex:* $x-a=0$, $x-b=0$, *& qu'on multiplie les unes par les autres;* CCL.
1ò. *Leur produit* $\begin{matrix} xx - ax + ab \\ -bx \end{matrix}$ *ſera égal à zero;*
2ò. *Si l'on conſidére ce produit ſimplement comme le premier membre d'une équation dont le ſecond membre ſoit zero, & dont la lettre* x *ſoit l'inconnue, cette lettre y repréſentera également chacune des valeurs* $+a$, $+b$, *qu'elle marque dans les équations multipliées; 3ò. Elle n'y aura aucune autre valeur.*

1ò. Concevons d'abord que la letre x des équations $x-a=0$, $x-b=0$, repréſente dans chacune des deux, lors qu'on les multiplie l'une par l'autre, la valeur $+a$ qu'elle a dans la premiére; & qu'ainſi les expreſſions $x-a$, $x-b$ ſoient équivalantes à ces deux,

$+a-a$, $+a-b$. Cela poſé, il eſt évident que

$\begin{array}{l} xx-ax+ab \\ \quad -bx \end{array}$, ou $\overline{x-a}\,\mathrm{X}\,\overline{x-b} = \overline{+a-a}\,\mathrm{X}\,\overline{+a-b}$,

ou $\begin{array}{l} aa-aa+ab=0 \\ \quad -ba \end{array}$; d'où il ſuit que . .

$$\begin{array}{l} xx-ax+ab=0. \\ \quad -bx \end{array}$$

On prouvera de la même maniére qu'en ſupoſant que x marque la valeur $+b$ qu'elle a dans la ſeconde équation $x-b=0$, il s'enſuit pareillement que

$$\begin{array}{l} xx-ax+ab=0. \\ \quad -bx \end{array}$$

2ò. Maintenant il eſt encore clair que ſi on conſidére $\begin{array}{l} xx-ax+ab \\ \quad -bx \end{array}$ ſimplement comme l'expreſſion de pluſieurs gr: qui jointes enſemble ſoient égales à zero, & dans leſquelles la letre x marque une gr: inconnue, cette letre x aura chacune des deux valeurs $+a$, $+b$ dans l'équation ſupoſée $\begin{array}{l} xx-ax+ab=0 \\ \quad -bx \end{array}$; puiſqu'en les y ſubſtituant à la place de x, toutes les gr: qui la compoſent ſe détruiſent, comme je viens de le démontrer.

3ò. J'ajoute que x ne peut avoir aucune autre valeur que $+a$, ou $+b$, dans l'équation ſupoſée $\begin{array}{l} xx-ax+ab=0 \\ \quad -bx \end{array}$; en voici la raiſon. Qu'une gr: quelconque diférente de $+a$, & de $+b$, ſoit nommée x: Il eſt clair que $x-a$ & $x-b$ ſeront l'une & l'autre diférentes de zero; par conſéquent que leur produit $\begin{array}{l} xx-ax+ab, \\ \quad -bx \end{array}$ ne ſera pas non un aſſemblage de gr: qui ſe détruiſent entiérement.

Theo-

Theorême.

1°. *Une équation composée quelconque peut être considerée comme le produit d'autant d'équations simples qu'elle a de dégrés, & dont les gr: inconnues soient marquées par la même letre qui exprime celles de cette équation.* 2°. *La letre inconnue représente également dans l'équation composée, toutes les valeurs qu'elle marque dans les équations simples.* 3°. *Elle n'a aucune autre valeur dans cette équation.* CCLI.

Soit, par ex:, l'équation $xxx+pxx+qx+r=0$, où je supose que les letres p, q, r, marquent des gr: déterminées quelconques, positives ou négatives, & qui, par conséquent, représente toutes les équations possibles du 3.me dégré.

On peut concevoir trois gr: a, b, c, telles qu'après les avoir nommées, chacune en particulier, x, & formé les équations simples $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, si on les multiplie les unes par les autres, d'où l'on aura

$$\begin{array}{l} xxx-axx+abx-abc=0 \\ \quad\;\; -bxx+acx \\ \quad\;\; -cxx+bcx \end{array}$$

cette équation soit égale, terme à terme, à celle dont il s'agit, savoir à l'équation . . . $xxx+pxx+qx+r=0$; c'est à dire, qu'on ait les quatre suivantes, $xxx=xxx$, $-axx-bxx-cxx=pxx$, $+abx+acx+bcx=qx$, $-abc=r$; ou ce qui revient au même, ces trois, $-a-b-c=p$, $+ab+ac+bc=q$, $-abc=r$: Car ces derniéres équations ne sont pas en plus grand nombre que les gr: a, b, c, dont la nature y est exprimée. Or si on peut concevoir trois gr: a, b, c, qui soient telles, il est clair que la premiére partie du Theorême est démon-

démontrée pour le cas que je ſupoſe ; par con-
*250. ſequent que les deux autres le ſont auſſi *.

On verra ſans peine qu'on peut raiſonner de la même maniére ſur toute autre équation .

Définitions.

CCLII. Les valeurs qu'a l'inconnue dans les équations ſimples dont une équation compoſée eſt le produit, valeurs qui ſont donc les racines des équations ſim-
*147. ples *, s'apellent auſſi les *racines* de l'équation compoſée. Par exemple l'équation

$$\begin{array}{l} xxx - axx + abx - abc = 0 \\ \quad\; - bxx + acx \\ \quad\; - cxx + bcx \end{array}$$

, étant le produit de ces trois $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, dans leſquelles l'inconnue x a les valeurs $+a$, $+b$, $+c$, ces trois valeurs ſont les racines de la premiére équation.

CCLIII. Lorſqu'une racine d'une équation eſt une gr: poſſible, ſoit poſitive ſoit négative, on dit qu'elle eſt *réelle* : Lors, au contraire, que c'eſt une gr: impoſſible, elle porte le nom de racine *imaginaire*. Par ex:, l'équation $xx - 25 = 0$, doñant $xx = +25$, & par conſéquent $x = \pm 5$, ſes deux racines ſont réelles : Mais l'équation $yy + 25 = 0$, donnant $yy = -25$, & par là même $y = \mp \sqrt{-25}$, il s'enſuit que ſes deux racines ſonr imaginaires.

Toute racine réelle d'une équation eſt neceſſairement commenſurable ou incommenſurable : Et ſupoſé qu'elle ſoit de cette derniére ſorte, elle eſt purement incommenſurable, ou *mixte*, c'eſt à dire, compoſee d'une gr: comenſurable, & d'une ou de pluſieurs gr: entiérement

ment incommensurables. Celle ci, $xx - 2ax - aa - b = 0$, qui a été formée par la multiplication de ces deux, $x - a - \sqrt{b} = 0$, $x - a + \sqrt{b} = 0$, desquelles resultent $x = a + \sqrt{b}$, $x = a - \sqrt{b}$, a deux racines mixtes.

Une racine imaginaire d'une équation est purement imaginaire, ou composée d'une gr: réelle, & d'une ou de plusieurs gr: purement imaginaires: Dans ce dernier cas, on dit qu'elle est *mixte imaginaire*. Les équations $x - \sqrt{-9} = 0$, $x + \sqrt{-9} = 0$, qui donnent $x = +\sqrt{-9}$, $x = -\sqrt{-9}$, produisent, étant multipliées l'une par l'autre, l'équation $xx + 9 = 0$, dont, par conséquent, les deux racines sont purement imaginaires: Le produit des équations $x + 2 - \sqrt{-9} = 0$, $x + 2 + \sqrt{-9} = 0$, desquelles résultent $x = -2 + \sqrt{-9}$, $x = -2 - \sqrt{-9}$, est l'équation $xx + 4x + 13 = 0$; ainsi les deux racines de cette derniére équation sont mixtes imaginaires.

Corollaires du dernier Theorême & des Définitions qui le suivent.

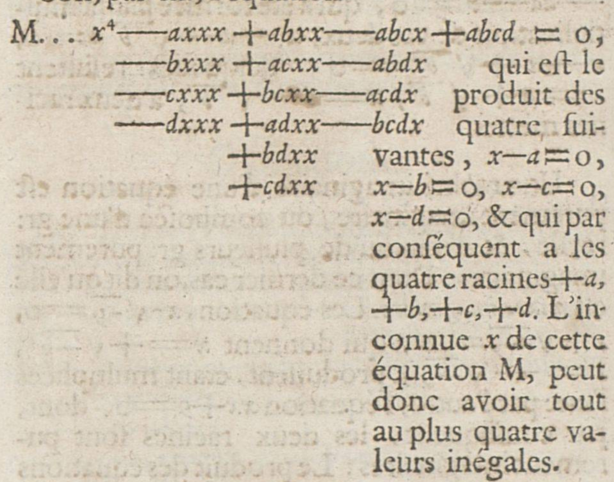
On peut considerer ces deux expressions comme Synonimes ; les racines d'une équation, & les valeurs de son inconnue. CCLIV

Toute équation a autant de racines que de dégrés. CCLV.

L'inconnue d'une équation composée peut avoir autant de valeurs inégales, que l'équation a de dégrés ; mais il est impossible qu'elle en ait un plus grand nombre, CCLVI.

Soit

Soit, par ex:, l'équation



$$\text{M}\ldots\ \begin{array}{lllll} x^4 & -axxx & +abxx & -abcx & +abcd = 0, \\ & -bxxx & +acxx & -abdx & \\ & -cxxx & +bcxx & -acdx & \\ & -dxxx & +adxx & -bcdx & \\ & & +bdxx & & \\ & & +cdxx & & \end{array}$$

qui est le produit des quatre suivantes, $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$, & qui par conséquent a les quatre racines $+a$, $+b$, $+c$, $+d$. L'inconnue x de cette équation M, peut donc avoir tout au plus quatre valeurs inégales.

CCLVII *Dans toute équation composée, par exem:, dans l'équation* M *de l'article précédent,* 1ò. *Le coëficient du second terme, savoir* $-a-b-c-d$, *est la gr: oposée de la somme des racines de l'équation.* 2ò. *Le coëficient du* 3me *terme, savoir* $+ab+ac+bc+ad+bd+cd$, *est la somme des produits de ces mêmes racines multipliées deux à deux de toutes les maniéres qui peuvent donner des produits diférens.* 3ò. *Le coëficient du* 4me *terme, savoir* $-abc-abd-acd-bcd$, *est la gr: oposée de la somme des produits de ces mêmes racines multipliées trois à trois de la même maniére, & ainsi de suite jusques au dernier terme qui est toujours le produit de toutes les racines de l'équation, si elle est d'un degré impair, ou la gr: oposée, si elle est d'un degré pair.*

CCLVIII *Lors qu'une équation composée n'a pas de second terme, une partie quelconque de ses racines est la gr: oposée de l'autre partie.*

Supoſé, par exemple, que le ſecond terme $-axxx - bxxx - cxxx - dxxx$ manque dans l'équation M, c'eſt à dire que $-axxx - bxxx - cxxx - dxxx = 0$, ou, ce qui revient au même que $-a - b - c - d = 0$; il eſt clair que $+a + b + c + d = 0$: D'où il ſuit que $a + b = -c - d =$; que $a + c = -b - d$, &c.

Quand toutes les racines d'une équation composée ſont réelles & poſitives, tous les termes de l'équation ont alternativement $+$ *&* $-$. CCLIX

Lorſque toutes les racines d'une équation compoſée ſont négatives tous les termes de l'équation ont le ſigne $-$. CCLX.

Supoſé qu'entre les équations ſimples $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, &c. *dont une équation compoſée* M *eſt le produit, ou entre les équations compoſées qui reſultent de ces équations ſimples multipliées deux à deux, trois à trois &c, il y en ait quelcune* G *qui ſoit ſans incommenſurables, cette équation eſt un Diviſeur exact de l'équation compoſée* M. CCLXI

Theorême.

Lorſqu'une équation compoſée M *eſt exactement diviſible par une gr.* G, *qui contient l'inconnue* x *de l'équation, cette gr:* G *eſt le premier membre ou de de quelcune des équations ſimples* $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, &c, *dont la compoſée* M *eſt le produit, ou de quelcune des équations compoſées qui naiſſent de ces équations ſimples multipliées deux à deux, trois à trois &c.* CCLXII

Que le quotient de l'équation M diviſée par la gr: G, ſoit apellé H, & on aura $M = GH$.

Puisque $M = GH$, toutes les valeurs qu'a l'inconnue x dans les gr: G, H, égales à zero, elle les a dans l'équation M, par la seconde partie du penultiéme Theorême ; donc les valeurs qu'a l'inconnue x dans la gr: G considerée come égale à zero, sont des racines de l'équation M, ou de l'équation $\overline{x-a} \times \overline{x-b} \times \overline{x-c}$ &c $= 0$; donc la gr: G est necessairement le premier membre, ou de quelcune des équations simples $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, &c, ou de quelcune des équations composées qui resultent de deux ou de plusieurs de ces équations simples multipliées les unes par les autres.

Theorême.

CCLXIII

Toute équation d'un degré impair a toujours une racine réelle ; & cette racine est positive lorsque le dernier terme de l'équation est négatif ; au contraire elle est négative lors qu'il est positif.

Je dis, par ex:, que l'équation $xxx+px-q=0$, dont je supose que le dernier terme $-q$ est négatif, a une racine réelle qui est positive.

Si on considére $xxx+px-q$ simplement comme une expression de grandeur, & la letre x comme représentant dans cette expression une gr: réelle & positive quelconque, on verra facilement 1ò. Que dans le cas ou la gr: x est infiniment petite, xxx & px peuvent être censées nulles à l'égard de q; & par là même qu'alors $xxx+px-q$ est une gr: negative. 2ò. Que dans le cas où x est infinie, px & q peuvent être censées nulles par raport à xxx; & qu'ainsi $xxx+px-q$ est une gr: positive. 3ò. Qu'il faut donc necessairement qu'entre ces deux cas extrêmes,

il y

il y en ait un où x soit telle qu'il en resulte que $xxx+px-q$ soit égale à zero. Or cela posé, il s'ensuit évidemment que l'équation $xxx+px-q=0$ a une racine réelle & positive.

Theorême.

Toute équation d'un degré pair, & dont le dernier terme est négatif, a toujours deux racines réelles, l'une positive, & l'autre négative. cclxiv.

On peut démontrer ce Theorême en prenant le même tour que j'ai pris pour démontrer le precédent.

Corollaire.

Entre toutes les équations composées, celles de degré pair & qui ont des gr: positives pour derniers termes, sont les seules dont toutes les racines puissent être imaginaires. CCLXV

Theorême.

Une équation composée qui a des racines imaginaires, en a toujours un nombre pair. cclxvi.

Qu'une telle équation que je nommerai M, soit le produit, par ex:, de quatre équations simples, que je marquerai par les lettres A, B, C, D.

Puisqu'il ne paroit, comme je le supose, aucune gr: imaginaire dans l'équation M, il faut necessairément qu'entre les équations A, B, C, D. il y en ait plus d'une dont les racines soient imaginaires, & que les parties purement imaginaires de ces équations impossibles disparoissent de l'équation G formée par la multiplication de ces mêmes équations là. Or les coëficiens & le dernier terme de l'équation composée G étant donc des gr: réelles, & toutes ses racines étant imaginaires, il s'ensuit qu'elle est de degré pair *; par conséquent que les racines, ou, ce qui revient au mê- *265.

me, les racines imaginaires de l'équation M, sont en nombre pair.

Theorême.

cclxvii. *Lorsqu'une équation ne contient ni fractions ni incommensurables & que son premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité, toute racine commensurable de cette équation est necessairement une grandeur entiére.*

Soit, par ex:, l'équation M qu'on voit ici, dans laquelle les letres p, q expriment des gr: entiéres quelconques.

M . . $xxx + pxx + qx - r = 0$.

Je dis donc, & je vais prouver qu'aucune fraction ne peut être une racine de l'équation M: On comprend assés qu'il s'agit ici d'une fraction comensurable dont le numerateur n'est pas divisible par le dénominateur.

Qu'une fraction quelconque reduite aux moindres termes, soit marquée par $\frac{a}{b}$.

Si la fraction $\frac{a}{b}$ étoit une racine de l'équation M, on auroit en substituant $\frac{a}{b}$ à la place de x dans cette équation,

$\frac{bbb}{aaa} + \frac{bb}{paa} + \frac{b}{qa} - r = 0$; & en multipliant par bb, . . .

$\frac{aaa}{b} + paa + qab - rbb = 0$; & ne laissant que $aaab$ dans le premier membre, . . .

$\frac{aaa}{b} = -paa - qab + rbb$. Or les gr: a, b étant premiéres entr'elles

les il est impossible que la fraction $\frac{aaa}{b}$ soit égale à une gr: entiére. Donc la fraction $\frac{a}{b}$ ne peut pas être une racine de l'équation M.

Theorême.

Suposé encore qu'une équation ne contienne ni fractions ni incommensurables, & que son premier terme n'ait pas d'autre coëficient que l'unité ; toutes les racines commensurables de cette équation sont des diviseurs de son dernier terme. CCLXIIX.

C'est une suite manifeste de l'article précédent & du 256me.

CHAPITRE II.

De la Transformation des équations composées.

Problême.

Changer une équation en une autre dont l'inconnue ait avec celle de l'équation qu'il faut changer, une rélation qui soit connue. CCLXIX.

Suposons, par exem:, qu'il faille changer l'équation M qu'on void ci dessous, en une autre dont l'inconnue soit égale à celle de l'équation N, plus une gr: connue a.

M . . . $xxx + px - q = 0$. étant nommé l'inconnue de l'équation que je veux former, y, je tire de

de ma ſupoſition l'équation ſuivante . . .

$x + a = y$; d'ou je conclus, en faiſant paſſer $+a$ dans le ſecond membre, que . .

$x = y - a$. Maintenant, je ſubſtitue $y - a$ à la place de x dans l'équation M que je change par là, en celle ci qui a la condition demandée, . . .

$$N \ldots yy - 2ay + aa = 0 .$$
$$+ py - ap$$
$$- q$$

Régle. Après avoir ſupoſé que l'inconnue de l'équation qu'il faut former, ſoit marquée par une letre y diférente de la letre x qui repréſente l'inconnue de l'équation propoſée M. 1ò. On écrira l'équation qui exprime le raport que la nouvelle inconnue y doit avoir avec la premiére x; 2ò. On cherchera par le moien de cette équation la valeur de la premiére inconnue x dans l'équation M; après quoi le Problême ſera réſolu.

Définition.

cclxx. *Transformer* une équation M, c'eſt en général la changer en une autre nature N dont l'inconnue ait avec celle de la premiére équation M une relation qui ſoit connue .

La ſeconde équation N ſe nomme la *transformée* de la premiére M .

Pro-

Problême.

Oter le ſecond terme d'une équation composée ; c'eſt cclxxi.
à dire, la transformer en une autre dont le ſecond terme s'évanouiſſe.

Soit proposée, par ex; l'équation . . .

M . . $xx + px - q = 0$. Je nomme l'inconnue de la transformée que je veux former, y, & je supoſe que . .

$$x = y - \frac{p}{2};$$

aprè quoi je ſubſtitue $y - \frac{p}{2}$ à la place de x, dans l'équation M qui ſe change par là en celle ci, . . .

$$\begin{aligned} yy - py &+ \frac{pp}{4} \\ + py &- \frac{pp}{2} \\ &- q \end{aligned} = 0$$

laquelle ſe reduit à cette autre qu'il falloit former . .

$$yy - \tfrac{1}{2}pp - q = 0.$$

Régle. 1ò. Il faut ſupoſer l'inconnue x de l'équation proposée M, égale à une nouvelle inconnue y, jointe avec avec la gr: oposée du quotient qu'on aura en diviſant le coëficient du ſecond terme de l'équation M, par le nombre qui exprime le degré de cette équation . 2ò. Il faut ſubſtituer cette valeur à la place de la premiére inconnue x dans l'équation M. 3ò. Il faut abre-

abreger la nouvelle équation, & on aura la transformée N qu'on se proposoit de trouver.

Problême.

CCLXXII *Suposé que le premier terme d'une équation composée, qui ne contienne point de fractions, ait un coëficient diférent de l'unité; on propose de transformer cette équation en un autre qui ne contienne pareillement aucune fraction, & dont le premier terme n'ait que l'unité pour coëficient.*

Qu'il faille résoudre ce Problême; par ex: a l'égard de l'équation . . . .

M . . $axxx + pxx + qx - r = 0$. Je supose celle ci . .

$x = \frac{y}{a}$; Je substitue $\frac{y}{a}$ à la place de x dans l'équation M, ce qui me donne.

$\frac{ayyy}{aaa} + \frac{pyy}{aa} + \frac{qy}{a} - r = 0$; J'ote les fractions, & j'ai

$ayyy + apyy + aaqy - aaar = 0$; enfin je divise par a, & il me vient . . .

$yyy + pyy + aqy - aar = 0$.

Régle. 1°. Il faut suposer l'inconnue x de l'équation proposée M, égale au quotient $\frac{y}{a}$ d'une nouvelle inconnue y divisée par le coëficient a du premier terme de l'équation M. 2°. Il faut substituer le

le quotient $\frac{y}{a}$ à la place de x dans l'équation M; & l'on aura par là une seconde équation. 3ò. Il faut ôter les fractions de la seconde équation qu'on aura trouvée, & il en resultera une troisiéme équation qu'on divisera par le coëficient de son premier terme; après quoi le Problême sera resolu.

SECTION III.

Où l'on fait voir comment il faut trouver les racines commensurables des équations composées, & comment il faut reduire au plus simple degré les équations composées qui n'ont point de racines commensurables.

CHAPITRE I.

Où l'on explique la maniére de trouver les racines commensurables des équations composées.

Définitions.

LOrsqu'une équation composée est exactement divisible par quelqu'autre équation plus simple, on dit qu'elle est *reductible*. Telle est donc la suivante $xxx - 2xx - 5x + 10 = 0$; car elle peut être divisée sans reste par chacune cclxxiii

de ces deux dont elle eſt le produit, $xx - 5 = 0$, $x - 2 = 0$.

Quand une équation composée n'eſt exactement diviſible par aucune autre équation plus ſimple, c'eſt une équation *irreductible*. Ainſi, l'équation $xx - 5 = 0$, apartient à cette derniére claſſe.

Avertiſſement.

Je renfermerai dans la même claſſe les équations ſimples & ſans incommenſurables.

Theorême.

CCLXXIV. *Toute équation composée reductible eſt le produit de pluſieurs équations irreductibles.*

Ce Theorême eſt une ſuite évidente des articles 250, & 262.

Problême.

CCLXXV. *Trouver toutes les racines commenſurables que peut avoir une équation composée;*

Supoſé, par exemple, qu'il faille réſoudre ce Problême à l'égard de l'équation ſuivante . . .

M . . . $xxxx - 5xxx + xx + 25x - 30 = 0$

1°. Fondé ſur l'article 257, je cherche d'abord tous les diviſeurs du dernier terme -30; & après avoir trouvé que ce ſont les nombres ± 1, ± 2, ± 3, ± 5, ± 6, ± 10, ± 15, ± 30, je commence à ſubſtituer ſucceſſivement chacun de ces nombres à la place de x dans l'équation

tion M. Aiant substitué $+1$, je vois que tous les termes dont l'équation M est composée ne se détruisent pas; d'où je conclus que $+1$ n'est pas une racine de eette équation. Je substitue ensuite le nombre -1, & je tire encore à son égard la même conséquence. Je passe donc au nombre $+2$, dont la substitution me fait connoitre que ce nombre est une racine de l'équation M. Ainsi, je divise l'équation M par l'équation $x-2=0$, & je trouve pour quotient l'équation . . .

N . . . $xxx-3xx-5x+15=0$

2°. J'opére de la même maniére sur l'équation N; & après avoir trouvé que le nombre $+3$ est une de ses racines, je la divise par l'équation $x-3=0$, & j'ai pour quotient l'équation . . .

P . . . $xx-5=0$

3°. J'opére encore de la même maniére sur cette équation, & je découvre qu'elle n'a aucune racine commensurable. Ainsi, je sai que l'équation proposée M n'a pas d'autres racines de cette sorte que les deux que j'ai trouvées, savoir $+2$, & $+3$.

Régle. 1°. Après avoir trouvé tous les diviseurs du dernier terme de l'équation proposée M, on substituera successivement chacun de ces diviseurs à la place de l'inconnue x dans l'équation M, jusques à ce qu'on soit arrivé à un diviseur dont la substitution fasse que tous les termes de l'équation M se détruisent; & l'on aura dans ce diviseur une racine commensurable de l'équation proposée. Mais si on n'en trouve aucun qui ait cette proprieté, il en faudra

dra conclure que l'équation M n'a point de racine commensurable. Dans le premier cas, on divisera l'équation M par l'inconnue x moins la racine qu'on aura trouvée, & l'on aura pour quotient une nouvelle équation N plus simple que la proposée M.

2°. On opérera de la même maniére sur l'équation N, & l'on continuera l'opération jusques à ce qu'on soit arrivé à une équation qu'on ne puisse plus abaisser. Si cette équation se trouve composée, le Problême sera résolu; si elle est simple, il n'y aura plus qu'a faire passer toutes ses gr: connues dans le second membre, & l'on aura la derniére racine qu'il falloit trouver.

CHAPITRE II.

Où l'on explique la maniére de reduire au moindre degré les équations composées qui n'ont point de racines commensurables.

Problême.

CCLXXVI. *Trouver toutes les équations irréductibles par lesquelles une équation composée qui n'a point de racines commensurables peut être divisée sans reste.*

Soit proposée l'équation

M.. $xxxxx + 4xxxx + 4xxx + 9xx + 8x + 2 = 0$.

Puisque toutes les racines de cette équation sont incommensurables, il est clair qu'elle ne peut être exa-

exactement divisée par aucune équation irréductible d'un plus simple degré que le second ; par conséquent que si elle est réductible, il faut nécessairément qu'elle soit le produit de deux équations irréductibles, l'une du second degré, & l'autre du troisiéme. Cela posé, 1°. Je représente celle du second degré par la suivante . . .

N . . $xx + ax + b = 0$: Ainsi les lettres *a, b* marquent des grand: comensurables dont la seconde *b* est nécessairement un diviseur exact du dernier terme de l'équation M ; & il ne s'agit que de trouver ces deux grandeurs. 2°. Je divise l'équation M par l'équation N jusques à ce que je sois arrivé à un reste que je ne puisse plus diviser ; reste que l'opération me donne tel qu'on le voit ici.

$$\begin{array}{ll} +8x & +2 \\ -4bx & -9b \\ +bbx & +4bb \\ +8abx & -2ab^2 \\ -3aabx & +4ab \end{array}$$

Je considére que l'équation N étant un diviseur exact de l'équation M, il faut que ce reste soit égal à zero ;

$-9ax$ $-4aab$
$+4aax$ $+aaab$
$-4aaax$
$+aaaax$

ro ; par conſéquent que chacun de ſes deux termes ſoit composé de grandeurs qui ſe détruiſent. Enſuite, aiant diviſé le premier par x, je les ordonne donc l'une & l'autre par raport à la letre a, & je forme les deux équations ſuivantes O, P,

$$O.\ .\ aaaa - 4aaa + 4aa - 9a + bb = 0$$
$$-3baa + 8ba - 4b$$
$$+8$$

$$P.\ .\ baaa - 4baa + 4ba + 4bb = 0$$
$$-2bba - 9b$$
$$+2$$

4°: Puiſque b eſt un diviſeur du dernier terme, $+2$ de l'équation M, je prens tous les diviſeurs de ce terme, & je trouve que ce ſont les nombres ± 1, ± 2: Enſuite je les ſubſtitue à la place de b dans la plus ſimple des deux équations O, P, c'eſt à dire dans la derniére; & après chaque ſubſtitution j'examine ſi l'inconnue a de l'équation ainſi changée, n'y a point

a point de valeur commensurable. La premiére que je trouve nait de la substitution de $+2$, & c'est $+4$. J'écris donc $+2$ à la place de *b*, & $+4$ à la place de *a* dans l'équation N, qui se change par là en celle ci.

N . . . $xx+4x+2=0$: Après quoi j'essaie de diviser l'équation M par $xx+4x+2$, & j'ai pour quotient sans reste . .

Q . . . $xxx+2x+1=0$; D'où je conclus que le diviseur N, & le quotient Q sont effectivément les deux équations que je me proposois de trouver .

Régle. Premiére partie. 1o. Il faut chercher de la maniére que j'explique dans la seconde partie de la Régle, toutes les équations irréductibles du second degré qui sont des diviseurs exacts de l'équation proposée M; & on aura par l'opération le quotient Z de M divisée par le produit de toutes ces équations là.

2o. Il faut chercher suivant la même Méthode toutes les équations irréductibles du troisiéme degré qui sont des diviseurs exacts du quotient Z; & l'opération donnera un nouveau quotient, savoir celui du premier Z divisé par le produit de toutes ces équations

tions du troiſiéme degré. Il faut continuer de la même maniére juſques à ce qu'on ſoit arrivé à un quotient irréductible ; après quoi l'on aura réſolu le Problême.

Seconde Partie. Voici préſentement la Méthode pour trouver toutes les équations irréductibles du moindre degré pour leſquelles une équation compoſée M qui n'a aucune racine commenſurable, pour être diviſée ſans reſte.

1o. On formera une équation N qui les repréſente: C'eſt à dire, une équation qui ait la même inconnue x que l'équation propoſée M; qui ſoit du même degré que celles qu'il faut découvrir; & dont les coëficiens & le dernier terme ſoient marqués par des letres $a, b, c, d, \ldots h$, qu'on n'ait pas encore emploiées. Ces letres $a, b, c, d, \ldots h$, que j'appellerai ſimplement les inconnues du Problême, exprimeront donc des grandeurs commenſurables dont la derniére h ſera un diviſeur exact du dernier terme de l'équation propoſée M.

2o. On diviſera l'équation M par la repréſentative N juſques à ce qu'on ſoit arrivé à un reſte qu'on ne puiſſe plus diviſer ; reſte dont tous les termes, horsmis le dernier, contiendront des puiſſances de l'inconnue x.

3o. Après avoir diviſé les termes de ce reſte dans leſquels il y aura des puiſſances de x, par ces puiſſances, on ſupoſera les quotiens & le dernier terme, chacun en particulier, égal à zero; ce qui donnera autant d'équations que le Problême contient d'inconnues.

4o. On reduira toutes ces équations à deux que j'appellerai O, P, dans leſquelles il n'y ait que deux des inconnues $a, b, c, d, \ldots h$, du Problême, ſavoir la
*233. derniére h & une autre *.

5o. On prendra tous les diviſeurs du dernier terme de l'équation propoſée M, & on les ſubſtituera ſucceſſive-

cessivement à la place de *h* dans la plus simple des deux équations O, P ; j'apellerai le diviseur substitué *l*. Après chaque substitution, on cherchera les valeurs commensurables des autres inconnues *a*, *b*, *c*, *d*... du Problême *, en écrivant le diviseur *l* à la place de *h* dans les équations mises à part ; on substituera ces valeurs à la place des inconnues *a*,*b*,*c*,*d*, &c, & le diviseur *l* au lieu de *h* dans l'équation représentative N ; on divisera la proposée M par la représentative N ainsi changée ; ou bien, si on a déja fait une semblable opération qui ait donné un quotient exact, on divisera ce quotient par la même équation dont je parle, & ainsi de suite. Suposé que la division ne laisse aucun reste, l'équation changée N sera donc une de celles qu'il falloit trouver.

*275.

SECTION IV.

De la Solution des équations composées.

CHAPITRE I.

Où l'on explique la Solution des équations du second degré.

Problême.

Trouver les deux racines d'une équation quelconque du second degré. CCLXXVII.

Soit proposée l'équation suivante M où les letres *p*, *q* marquent des gr: réelles quelconques, & qui, par consequent, représente toutes les équations dont il faut trouver les racines.

M . . $xx+px+q=0$. Je fais paſſer le dernier terme $+q$ dans le ſecond membre, & j'ai .

$xx+px=-q$; J'ajoute $\frac{1}{4}pp$ de part & d'autre, afin de pouvoir extraire la racine quarrée du premier membre, ce qui me donne.

$xx+px+\frac{1}{4}pp=\frac{1}{4}pp-q$; je prens les racines quarrées des deux membres, & je trouve . . .

$x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp-q}$; d'où je tire l'équation N à laquelle il s'agiſſoit d'arriver,

N . . . $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp-q}$

Pour avoir les deux racines d'une équation particuliére du ſecond degré, il n'y aura donc qu'a ſubſtituer dans l'équation N à la place des letres p, q les gr: de l'équation particuliere repréſentées par ces letres. Ainſi, pour avoir les deux racines de l'équation $xx-8x+15=0$, on ſubſtituera -8 au lieu de p, & $+15$ au lieu de q, & l'on aura $x=+4\pm\sqrt{16-15}=4\pm1=\pm\frac{5}{3}$.

CHAPITRE II.

Où l'on donne la Solution ordinaire des équations du troiſiéme degré.

Problême.

cclxxiix *Réſoudre une équation quelconque du troiſiéme degré.*

On

On ôtera d'abord le ſecond terme de l'équation propoſée, ſi elle en a un*. Que l'équation delivrée de ce terme ſoit repréſentée par la ſuivante *271.

M.. $xxx+px+q=0$. Aiant ſupoſé celleci.

N, $x=z-\frac{p}{3z}$, on introduira cette valeur de x dans l'équation M, & on aura ...

$z^3-\frac{p^3}{27z^3}+q=0$; on multipliera cette équation par z^3, ce qui donnera

$z^6+qz^3-\frac{1}{27}p^3=0$; on ajoutera de part & d'autre $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$, & il reſultera de cette operation

$z^6+qzzz+\frac{1}{4}qq=\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}ppp$; on prendra les racines quarrées des deux membres & l'on aura ...

$zzz+\frac{1}{2}q=\pm\sqrt[2]{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}ppp}$; d'où il viendra

$zzz=-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}ppp}$; équation qui donnera celle ci

$z=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt[2]{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}ppp}}$. Maintenant, ſi l'on ſubſtitue cette valeur de z à ſa place dans l'équation N, on aura l'équation O qu'il falloit trouver

$$O \ldots x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}ppp}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}ppp}}}$$

Remarques.

Lorſque les trois racines de l'équation M ſont réelles & inégales, la gr: $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}ppp$ eſt négative, d'où il ſuit que dans ce cas l'équation O renferme des expreſſions imaginaires.

Lorſque ces trois racines étant réelles, il y en a deux égales, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}ppp = 0$; & l'équation O ne donne que la troiſiéme racine.

Si l'équation M a deux racines imaginaires, la gr: $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}ppp$ eſt poſitive; & l'équation O donne effectivement la racine réelle de l'équation M.

Ces bizarreries aparentes ſont des ſuites neceſſaires de la ſupoſition $x = z - \frac{p}{3z}$, qu'on a faite pour réſoudre le Problême.

Dans

Dans le premier cas, cette ſupoſition eſt abſolument impoſſible ; *le minimum*, ou la moindre des gr: repréſentées par $z - \frac{p}{3z}$ ſurpaſſant la plus grande des trois racines x de l'équation M : Dans le ſecond cas, elle n'eſt poſſible que par raport à la troiſiéme racine de M ; Mais dans le troiſiéme, elle ne renferme aucune contradiction.

F I N.



Fau-

Fautes qu'il faut corriger avant que de lire l'Ouvrage.

Pages. Lign.	Fautes.	Corrections.
3.23.	II.	III.
5.20,21.	nombres entiers -	Grandeurs entiéres
15. der:	$+3m\ 5n$ - - -	$+3m-5n$.
17. 5.	*Souſtrarie* - - -	*Souſtraire*
20.32.	*a* - - -	*a , c*
23. 7.	deux	quatre
27.26.	*multiplicaſeur*	*multiplicateur*
32.15.	*88. (c'eſt à la marge)	*87.
34.dern:	*ſignes b.*	*ſignes*
36. 2.	$--a \quad +a$ - -	$--a \mid +a$
3.	$--b \quad --b$ - -	$--b \mid --b$
4.	$+ab \quad --ab$ - -	$+ab \quad --ab$
5.	$+3ab$ - - -	$3ab$
6.	$+5b$ - - - -	$5b$
13.	$+15a^2b^2--24a^5bc^5d^2$ -	$15a^5b^2--24a^2bc^5d^2$
37.17.	Car $\frac{2}{5}$ - - -	Car $\frac{2}{5}$. 1
42.12.	108. -	107
43.14.	*ad viſée* - - -	*a diviſée*
47.11.	M,N,P - - -	M , N
49.14.	*91	*92.
54.11. pour	mb +e - - -	mb +c
56. 8.	5*a* (2 5*a*	lign.22. 13*a* 15*a*
60.27	*91.	92 .
70.18.	$\frac{a+b}{m}+c$	$\frac{a+b+c}{m}$
73.11.	$\frac{a}{m}\ \frac{b}{m}$	$\frac{a}{m} - \frac{b}{m}$
74.14.	$\frac{ab}{bd}$ - - - - - -	$\frac{ad}{bd}$
78.12	3*aaab*	4*aaab*
81. 2.	$\left\{\frac{6a^3b}{4c^3}\right.$ - -	$\left\{\frac{6a^3b}{2c^3}\right.$
81.23.	*bb*	*ab*

P. L.	Fautes.	Corrections.
89.14.	$\frac{\sqrt[m]{a^m}}{b^m}$	$\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}$
92.12:	ces quotiens f,g,h,i,	ces quotiensf,g,h,I
92.14.	i $\sqrt[m]{d}$	I $\sqrt[m]{d}$
94. 2.	$\sqrt[mn]{a^{pm}}$	$\sqrt[mn]{a^{pn}}$
94.der:	$+\sqrt[2]{5}+\sqrt[2]{6}$	$\sqrt[2]{5}+\sqrt[2]{6}$
99.pen:	$+\sqrt{-b}$ (c'eſt la deuxiéme)	$-\sqrt{-b}$
100.2.	$+2\sqrt{-6}$ (c'eſt la 2me)	$-2\sqrt{-6}$
11.	$+\sqrt[2]{6}+\sqrt[2]{5}$	$+\sqrt[2]{-6}+\sqrt[2]{-5}$
102. 3.	$+6+6-6$	$-6-6+6$
6.	-6	$+6$
104. 14.	*Propoſition*	*Proportion*
109.21.	plus que	plus grand que
115.31,32.	nombre	membre
116.23.	$y-x=63$	$*y-x=63$
119.25.	$2z-50=110$	$\{2z-50=110$
122.20.	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
23.	$y=\frac{1}{2}$	$x=\frac{3}{2}$
128.11.	$+f$	$-f$
134.17.	B	A
137. 9.	*233	*234
139.21.	*qu'on multiplie*	*qu'on les multiplie*
146. 2.	égales	égalées
147.dern.	les	les
148.22.	$\frac{bbb}{aaa}+\frac{bb}{paa}+\frac{b}{qa}$	$\frac{aaa}{bbb}+\frac{paa}{bb}+\frac{qa}{b}$
148.25.	$aaab$	$\frac{aaa}{b}$

Pag. L.	Fautes.	Corrections
149.11.	256me. - - -	257me.
149.22.	N - - - - - -	M .
23.	*xxx* - - - - -	*xx*
23.	étant - - - -	Aïant
150.25.	*x* . - - - - -	*x* . 30.on substituera cette valeur à la place de *x*
30.	autre nature N	autre N
151.20.	$-\frac{1}{2}pp$ - - -	$-\frac{1}{4}pp$
160. 7.	pour - - - -	par
8.	pour - - - -	peut:

ELEMENS
DE
GEOMETRIE.



YVERDON,

Chez JEAN JAQUES GENATH
L'An 1725.

Avertissement.

Je n'ai fait imprimer ces Elemens qu'en faveur des Personnes à qui je les explique. Si je m'étois proposé de les donner au Public, je n'aurois rien épargné pour les rendre moins imparfaits .



ELEMENS DE GEOMETRIE.

Introduction.

Définitions.



L'Etendue est l'objet de cette partie des Mathematiques qui porte le nom de *Geometrie*. 1.

Une étendue en longueur, en largeur, & en profondeur, s'apelle un *Solide*. 2.

Une étendue en longueur, & en largeur, sans profondeur, se nomme une *Surface*. 3.

Une étendue en longueur, sans largeur, ni profondeur, s'apelle une *Ligne*. 4.

Un terme qui n'est étendu d'aucun coté, porte le nom de *Point*. 5.

Remarque.

A parler absolument, les surfaces sont les termes des solides; les lignes, ceux des surfaces; & les points ceux des lignes: Ainsi, il ne peut y avoir ni surface sans solide, ni ligne sans surface, ni point sans ligne. Cependant

pendant on peut ſe former de ces trois ſujets, les ſurfaces, les lignes, & les points, les idées abſtraites que je viens de marquer.

LIVRE PREMIER.

Des Lignes.

SECTION I.

Des Lignes droites.

R: S'il y a des ſujets qu'on ne doive point definir, ce ſont, ſans contredit, & les Lignes *droites* & les Lignes *courbes*.

Corollaires de la nature des Lignes droites.

6. *On peut mener une ligne droite* AB *par deux*
f: 1. *points donnés* A, B ; *& l'on n'en peut mener qu'une ſeule.*

7. *Deux lignes droites* ABC, BCD, *qui ont deux points*
f: 2. *communs* B, C, *ne font qu'une même ligne droite.*

8. *Deux lignes droites* AB, BC, *qui ſe rencontrent*
f: 3. & 4. *de maniére qu'elles ne ſont pas en ligne droite l'une à l'égard de l'autre, ne ſe rencontrent qu'en un point* B, *ſoit qu'elles ſe touchent ſimplement, ou qu'elles ſe coupent.*

Car ſi elles ſe rencontroient en deux points, ces deux points leur ſeroient communs ; ainſi, elles ne feroient qu'une même ligne droi-
* 7. te*, ce qui eſt contraire à la ſupoſition.

On

On peut prolonger une ligne droite AB auſſi loin qu'on voudra, par chacune de ſes extremités A, B. 9. f: 5.

Une même ligne droite AB ne peut pas avoir du même coté deux prolongemens diferens BC, BD. 10. f: 6.

La ligne droite AB eſt la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener d'un point A à un autre B. 11. f: 7.

Si une ligne AB eſt la plus courte de toutes les lignes qu'on puiſſe mener d'un point A à un autre B, elle eſt droite. 12. f: 7.

Car ſi la ligne *AB* n'étoit pas une ligne droite, elle ne ſeroit pas la plus courte de toutes les lignes qu'on pût mener du point *A* au point *B* *. * 11.

Definitions.

La ligne droite *AB* qui va d'un point *A* à un autre *B*, s'apelle la *Diſtance*, ou *l'Intervale* de ces deux points *A*, *B*. 13. f: 7.

On dit qu'un point *C* eſt *hors* d'une ligne droite *AB*, lors qu'il eſt, non ſeulement hors de cette ligne, mais encor hors de ſon prolongement. 14. f: 8.

Si de l'extremité *A* d'une ligne droite *AB*, on mêne par un point *C* pris hors de cette ligne, une autre ligne droite *AC*, elle formera avec la premiére une ouverture *CB* qui s'apelle *Angle*. 15. f: 9.

Ces lignes *AB*, *AC* ſont nommées les *Jambes*, ou les *Cotés* de l'angle.

Le

Le point *A* ou elles ſe rencontrent, s'apelle la *Pointe* ou le *Sommet* de l'angle.

Rem: On marque un angle, ou ſimplement par la letre qui eſt vers ſa pointe, ou par les trois letres qui déſignent ſes cotés, en mettant au milieu celle qui eſt vers ſa pointe. Ainſi au lieu de dire l'angle *CB*, on dit ſimplement l'angle *A*, ou bien on dit l'angle *CAB* ou *BAC*. Mais on ne le marque guere de la ſeconde maniere que lorſque la premiére ſeroit équivoque.

Avertiſſement.

La ſection ſuivante eſt une éſpece de digreſſion que l'on ſe voit obligé de faire ici, afin de pouvoir être & plus court & plus clair dans le reſte de l'ouvrage.

SECTION II.

Où l'on etablit diverſes Propoſitions qui n'apartiennent pas proprement à ce Premier Livre, mais que la ſuite de l'ouvrage demande néantmoins qu'on explique ici.

CHAPITRE I.

Où l'on indique quelques unes des premiéres proprietés des ſurfaces planes.

Définition.

Définition.

Les surfaces qui sont droites en tout sens, s'apellent des surfaces *planes*, ou simplement des *Plans*. 16.

Corollaires.

Si l'on mêne une ligne droite par deux points d'un plan, tous les autres points de cette ligne seront sur ce plan. 17.

Par trois points donnés qui ne soient pas en ligne droite, on peut faire passer un plan; & l'on n'en peut faire passer qu'un seul. 18.

On peut faire passer un plan par une ligne droite, & par un point hors de cette ligne; & l'on n'en peut faire passer qu'un seul. 19.

Avertissement.

Dans chacun des autres articles de ce Livre, & de ceux du suivant, on supose, lors qu'on n'en avertit pas, que les points & les lignes dont on y parle sont sur un même plan; & ce plan est representé par le papier des Planches.

CHAPITRE II.

Où l'on établit diverses proprietés du Cercle.

Défini-

Définitions.

Si l'on couche ſur un plan une ligne droite
20. *AB* ; qu'on arête l'une de ſes extremités en
f : 10. un point fixe *A* de ce plan, en ſorte qu'elle puiſſe tourner librement autour de ce point ; enſuite qu'on la faſſe tourner juſques a ce qu'elle ſoit revenue à ſa premiére ſituation *AB*, elle decrira par ſon autre extremité *B* une ligne courbe *BCDEB* qu'on apelle *Cercle*, ou *Circonference* de *Cercle*, parce-que c'eſt proprement à la ſurface qu'elle termine qu'on donne le nom de Cercle.

21. Le point fixe *A* autour duquel la ligne
f : 10. *AB* qui décrit le cercle, ſe meut, porte le nom de *Centre* du Cercle.

Les lignes droites telles que *AB*, *AC*, *AD*,
22. *AE* menées du centre *A* à la circonference
f : 10. *BCDEB* s'apellent *Raïons*.

23. Toutes les portions de la circonference,
f : 10. comme *BC*, *BCD*, ſont des *Arcs*.

Les lignes droites, telles que *BC*, *BD* qui
24. vont d'un point de la circonference à l'autre, portent le nom de *Cordes* du cercle, ou plus proprement, des arcs *BC*, *BCD* dont elles joignent les extremités.

25. Les cordes comme *BD*, *CE* qui paſſent par le centre *A*, ſont nommées *Diametres*.

Corol-

Corollaires.

Tous les raïons d'un cercle ſont égaux. 26.

Car par ſa génération, ils ſont égaux chacun à la ligne *AB* qui l'a décrit. Fig. 10.

Tous les diametres d'un cercle ſont égaux chacun à deux raïons du même cercle ; & par conſequent ils ſont égaux entr'eux. 27. fig. 10.

Entre les points B, B, B *du plan ſur lequel un cercle eſt décrit,* 1°. *Ceux qui ſont éloignés du centre* A *de la longuer du Raïon ſont ſur la circonference ;* 2°. *Ceux qui en ſont moins éloignés, ſont dans le cercle.* 3°. *Ceux qui en ſont plus éloignés, ſont hors du cercle.* 28. f. 11.

Le Diametre BAD *d'un cercle* BCDEB *diviſe ſa circonference & ſa ſurface en deux parties égales* BED, BCD. 29. f. 12.

Car ſi on reploie la ſurface *BED* le long de *BD*, ſur la ſurface *BCD*, il eſt clair par le Corollaire précédent, que tous les points de l'arc *BED* tomberont ſur l'arc *BCD*; par conſequent, que l'arc & la ſurface *BED* couvriront exactement l'arc & la ſurface *BCD*.

Une corde BF *qui ne paſſe pas le centre* A, *diviſe la circonference & la ſurface en deux parties inégales* BCF, BEF. 30. f. 13.

Il n'y a pour s'en convaincre qu'a mener du point B par le centre A le diametre BAD.

Une corde BD *qui diviſe la circonference, ou la ſurface en deux parties égales* BCD, BED *paſſe par le centre.* 31. f. 14.

Car ſi elle n'y paſſoit pas, elle diviſeroit la circonference & la ſurface en deux parties
*30. inégales *.

Theorême.

32. *Supoſé que des pointes* A, M *de deux angles*
f: 15. & A, M, & *avec des raïons egaux* AB, MN *on*
16. *decrive dans ces angles des arcs de cercles* BC, NP *que l'on termine a leurs jambes ; ſi ces angles ſont égaux ces arcs* BC, NP *le ſeront auſſi.*

Si on met l'angle *A* ſur l'angle *M* en ſorte que le point *A* ſoit ſur le point *M*, & que le coté *AB* ſoit ſur le coté *MN* ; le coté *AC* tombera ſur le coté *MP*, puiſque les angles *A*, *M* ſont égaux. Or de là & de ce que le raïon *AB* eſt égal au raïon *MN*, il ſuit evidemment que l'arc *BC* couvrira exa-
* 28. ctement l'arc *NP* *.

Corollaires.

33. *En général, les angles* CAB, PMN *ſont en-*
f: 17. & *tr'eux comme les arcs* BC, NP *decrits de la ma-*
18. *niére que je viens de marquer.*

Car, 1ò. ſi les angles *CAB*, *PMN* ſont égaux, les arcs *BC*, *NP* le ſeront auſſi, comme on vient de le voir. 2ò. S'ils ſont inégaux, & que le premier *CAB* contienne, par ex:, trois fois la moitié du ſecond *PMN*, l'arc *BC* contiendra pareillement trois fois la moitié de l'arc *NP*. Parce que le premier angle *CAB* étant conçu diviſé en trois parties égales *CAD*, *DAE*, *EAB*, & le ſecond *PMN* en deux *PMQ*, *QMN*, toutes ces parties ſeront égales entr'elles ; & que par conſequent, les arcs *CD*, *DE*, *EB*, *PQ*, *QN* ſeront auſſi égaux entr'eux. *On*

On peut donc prendre ces arcs BC, NP, *comme on les prend en efet, pour les mesures de ces angles* CAB, PMN. 34. *fig:* 17. & 18.

Si de la pointe A *d'un angle* CAB, & *avec des raïons inégaux* Ab, AB, *on décrit dans cet angle des arcs de cercles* bdc, ADC *que l'on termine à ses cotés* AB, AC ; *ces arcs* bdc, BDC *auront le même raport aux circonferences* bdcefb, BDCEFB *de leurs cercles.* 35. *f*: 19.

Car, suposé, par ex: , que la moitié de l'angle *CAB* soit cinq fois dans le tour du point *A*, les moitiés des arcs *bc*, *BC*, seront pareillement cinq fois dans les circonferences *bdcefb*, *BDCEFB*. Parce que la partie *CAB* de ce tour étant concue divisée en deux parties égales *CAD*, *DAB*, & le reste en trois *BAF*, *FAE*, *EAC*, ces cinq angles seront donc égaux entr'eux ; par consequent, que les arcs *cd*, *db*, *bf*, *fe*, *ec*, de même que les autres *CD*, *DB*, *BF*, *FE*, *EC* le seront aussi.

Ainsi, on peut dire qu'un angle CAB *est d'autant de parties de cercle, qu'un arc* BDC *decrit dans cet angle de la maniére que je viens de marquer, contient de semblables parties de la circonference* BDCEFB *de son cercle.* 36. *f*: 19.

Par exemple, l'arc *BDC* contenant deux fois la cinquiéme partie de la circonference *BDCEFB*, on peut dire que l'angle *CAB* est de deux cinquiémes de cercle.

Définitions.

Toute circonference de cercle se conçoit divisée en 360. parties égales, qu'on apelle *Degrés.* 37.

Chaque degre ſe diviſe en 60. parties égales qu'on apelle *minutes* premiéres ; chaque minute premiére, en 60. *ſecondes* ; chaque ſeconde, en 60. *troiſiémes*, & ainſi de ſuite à l'infini.

Remarque.

fig: 19. Il ſuit du Corollaire précedent, qu'on peut dire qu'un angle *CAB* eſt d'autant de ces parties, degrés, minutes premiéres, minutes ſecondes, &c, que l'arc *BDC* qui le meſure, contient de ſemblables parties de la circonference *BDCEFB* de ſon cercles. Par exemple, l'arc *BDC* contenant deux fois la cinquiéme partie de la circonference *BDCEFB*, & par conſequent cet arc étant de 144. degrés de cette circonference, on peut dire que l'angle *CAB* eſt de 144. degrés.

Theorême.

38. *Un angle* CAB *a toujours pour ſa meſure un arc*
f: 20. CB *moindre que la demie circonference.*

Car il reſulte évidemment de la nature de l'angle, que l'arc *BC* eſt moindre que l'arc *BCD* termine en *D* par la ligne *AB* prolongée par ſon extremité *A*. Or ce dernier arc
*29. *BCD* eſt la moitié de la circonference *.

CHAPITRE III.

Où l'on établit quelques proprietés des Triangles.

Défini-

Définition.

Une ſurface plane *ABC* terminée par trois 39.
lignes droites *AB*, *BC*, *CA*, s'apelle *Triangle* *fig: 21.*
recti ligne, ou ſimplément *Triangle.*

Theorême.

Si d'un point D *pris par tout ou l'on voudra dans* 40.
un triangle ABC, *on mêne aux extremités* A, B *f: 22.*
de l'un de ſes cotés deux lignes droites DA, DB;
la ſomme des deux autres cotés CA, CB *ſera plus grande que la ſomme de ces deux lignes* DA, DB.

Aiant prolongé la ligne *DB* par ſon extremité *D*, juſques à ce qu'elle rencontre le coté opoſé *CA*, on aura.

$AE + ED > DA$*; *11.
$EC + CB > ED + DB$*. D'ou l'on conclura, en ajoutant, les premiers & les ſeconds membres de ces inégalités, que... *11.

$CA + ED + CB > DA + ED + DB$; & en retranchant de part & d'autre *ED*, que...

$CA + CB > DA + DB$, ce qu'il falloit démontrer.

Theorême.

Supoſé que deux cotés ab, ac *d'un triangle* abc, 41.
pris un à un, ſoient égaux à deux cotés AB, AC *f: 23. & 24.*

d'un autre triangle ABC, *& que l'angle* a *formé par les deux premiers cotés* ab, ac *soit égal à l'angle* A *formé par les deux derniers cotés* AB, AC; *ces deux triangles* abc, ABC *sont égaux dans tout le reste.*

Concevés que le triangle *abc* soit mis sur le triangle *ABC*, de maniére que le point *a* soit sur le point *A*, & que la ligne *ab* soit couchée sur la ligne *AB* ; 1ò. le point *b* tombera sur le point *B*, puisque *ab* = *AB* ; 2ò. la ligne *ac* tombera sur la ligne *AC*, puisque l'angle *a* = l'angle *A* ; 3ò. le point *c* tombera sur le point *C*, puisque *ac* = *AC* ; 4ò. Par consequent le triangle *abc* couvrira exactement le triangle *ABC*.

Donc ces deux triangles *abc*, *ABC* ; leurs cotés *bc*, *BC* oposés aux angles égaux *a*, *A* ; & leurs angles *b*, *B*, *c*, *C* oposes aux cotés égaux *ac*, *AC*, *ab*, *AB*, sont égaux.

Theorême.

42. *Suposé que deux cotés* ab, ac *d'un triangle* abc,
fig: 25. 26. *pris un à un, soient égaux à deux cotés* AB, AC
27. 28. 29. *d'un autre triangle* ABC ; *Si l'angle* a *formé par*
& 30. *les deux premiers cotés* ab, ac *est moindre ou plus grand que l'angle* A *formé par les deux derniers cotés* AB, AC, *le troisiéme coté* bc *du premier triangle* abc *est pareillement moindre ou plus grand que le troisiéme coté* BC *du second triangle* ABC.

Puisque l'un des deux angles *a*, *A* est moindre que l'autre, suposez par ex:, que $a < A$, & concevez que le triangle *abc* soit mis sur le triangle *ABC* de maniére que le point *a* soit sur le point *A*, & que la ligne *ab* soit couchée sur la ligne *AB* ; il est evident 1ò. que le point *b* tombera sur le point

point *B*, puiſque $ab = AB$; 2°. que le coté *ac* tombera entre les lignes *AC*, *AB*, puiſque l'angle *a* eſt moindre que l'angle *A* ; 3°. par conſequent que l'extremité *c* de ce coté *ac* tombera, ou dans le triangle *ABC* ; (*fig*: 25. & 26.) ou ſur ſon coté *BC* ; (*fig*: 27. & 28.) ou hors de cette triangle, (*fig*: 29. & 30.) Cela poſé.

1°. Si elle tombe dans le tri: *ABC*, on aura par l'article 40.....

$AC + CB > Ac + cB$; & en retranchant les lignes egales *AC*, *Ac*, f:25.&26

$CB > cB$.

2°. Si elle tombe ſur le coté *BC*, il eſt bien evident que... f:27.&28

$CB > cB$.

3°. Si elle tombe hors du triangle *ABC*, on aura par l'article 11... f:29.&30

$Cd + dA > AC$, &

$dB + dc > cB$: D'ou l'on conclura, en ajoutant les premiers & les ſeconds membres de ces deux inégalités, que...

$CB + Ac > AC + cB$; & en retranchant les lignes égales *Ac*, *AC* que...

$CB > cB$.

Dans tous les cas, $CB > cB$, qui eſt la même que *cb* ; par conſequent *cb* eſt moindre que *CB*, ce qu'il falloit démontrer.

Theorême.

Supoſé que les trois cotés ab, bc, ca *d'un triangle* abc, *pris un à un, ſoient égaux aux trois cotés* AB, BC, CA *d'un autre triangle* ABC ; *ces deux* 43. f:31.&32

deux triangles ſont égaux dans tout le reſte.

Car 1ò. $ab = AB$, & $ac = AC$. par la ſupoſition. 2ò. Il faut que l'angle *a* ſoit égal à l'angle *A*, puiſque s'il étoit plus grand, ou moindre, le coté *bc* qu'on ſupoſe égal au coté BC, ſeroit pareillement plus grand ou
*42. moindre que ce coté *BC.* * 3ò. Par conſequent, les triangles *abc*, *ABC* ſont égaux à
*41. tous égards * .

Demande.

44. fig: 33. *Si l'on met un angle* CAB *ſur une ſurface plane de maniére que l'une de ſes jambes*, AB, *ſoit couchée le long d'une ligne droite* ABab *menée ſur la même ſurface plane ; en ſuite qu'on faſſe mouvoir cet angle* CAB *de quelque coté* d *qu'on voudra, en ſorte que cette jambe* AB *gliſſe de long de cette ligne* ABab ; *Chaque point* C *de l'autre jambe* CA *decrira du même coté* d *une ligne droite* Cc *egale à la ligne* Aa *que la pointe* A *de cet angle decrira dans le même tems.*

Definitions.

45. f: 34. Si l'on prolonge un coté *AB* d'un triangle *ABC*, par l'une de ſes extremités *B*, ce prolongement *Bb* formera avec le coté *CB* qui aboutit à cette extremité *B*, un angle *CBb* qui porte le nom d'angle *éxterieur* du triangle *ABC*.

Les angles *BCA*, *BAC* du même triangle *ABC*, que ces deux cotés *AB*, *BC* forment avec la troiſiéme *CA*, ſont nommés les angles *interieurs* opoſés a cet angle exterieur *CBb*.

Theorê-

Theorême.

L'angle exterieur CBb *d'un triangle* ABC, *est plus grand que l'angle interieur opoſé* CAB *dont une jambe eſt le coté prolongé AB.* 46. f:35.

Concevez que l'angle *CAB* vienne à ſe mouvoir du côté de *b* ſur le plan du triangle *ABC*, enſorte que ſa jambe *AB* gliſſe le long de la droite *ABb*. Lorſque la pointe A ſera parvenue en *B*, le point *C* aura decrit du même côté une ligne droite *Cc* égale à *AB**, & dont l'extremité *c* ſera par conſéquent dans l'angle *CBb*; ainſi cet angle *CAB* aura la ſituation *cBb*. Or il eſt bien évident que l'angle *cBb*, ou *CAB*, eſt moindre que l'angle *CBb* . *44.

SECTION III.

Des Angles.

CHAPITRE I.

Des Angles en général.

Définition.

J'apelle point *moïen* d'une ligne droite ou courbe, tout point de cette ligne par lequel elle n'eſt pas terminée . 47.

Lemme.

Si de deux points A, M d'une ligne droite BO, on décrit du même côté ſur cette ligne deux demi cercles 48.
BCD, f:36.

BCD, NCO qui soient en partie l'un dans l'autre ; ils se couperont en un point C hors de cette ligne, & ne se rencontreront en aucun autre point.

Il suit évidemment de leur génération, 1ò. qu'ils ne se rencontreront pas sur la droite *BO*; 2ò. qu'ils se couperont en quelque point *C* hors de cette ligne. Ainsi il ne reste qu'à demontrer qu'ils ne se rencontreront en aucun autre point hors de la même ligne *BO* : Ce qui sera bien évident, si, comme je vais le prouver, tout point moïen *E* de l'arc *CD* est dans le demi cercle *NCO*; & si tout point moïen *F* de l'arc *CB* est hors de ce demi cercle.

Aiant imaginé les raïons *AE*, *AC*, *MC*, & la droite *ME*, on verra que les cotés *AM*, *AE* du tr: *AME*, sont égaux aux cotés *AM*, *AC* du triangle *AMC*, & que l'angle *EAM* est moindre que l'angle *CAM*. D'où l'on conclura que
*42. *ME* $<$ *MC** ; par consequent que le point *E* est
*28. dans le démi cercle *NCO* *.

On prouvera de la même maniére que le point *F* est hors de ce demi cercle *NCO*.

Lemme.

49. *Suposé que de deux points* A, M *d'une ligne droite*
fig. 37. BO, *& avec des raïons égaux* AD, MN *plus grands chacun que la moitié* AG *ou* MG *de la distance* AM *de ces deux points, on décrive du même coté sur cette ligne* BO *deux demi cercles* BCD, NCO; *ces deux demi cercles se couperont en un point* C *hors de la même ligne* BO, *& ne se rencontreront en aucun autre point.*

Car 1ò. puisque *AD* $>$ *AG*, & que *MN* $>$ *MG*, il est évident que les points *D*, *N* tombent de part & d'autre

d'autre du point *G*; le premier *D*, du coté de *O*; & le second *N* du coté de *B*. 2ò. Puisque *AG* = *MG*, & que *AD* = *MN*, il s'ensuit que *GD* = *GN*. 3ò. *GN* étant moindre que *MN*, par consequent que *MO*, & à plus forte raison que *GO*; *GD* est donc pareillement moindre que *GO*: Ainsi le point *D* est entre les points *G*, *O*; d'où il suit que ce point *D* est entre les points *N*, *O*. Ou prouvera de la même maniére que le point N est entre les points *D*, *B*. 4ò. Or il resulte évidemment de ces derniéres verités, que les demi cercles *BCD*, *NCO* sont en partie l'un dans l'autre; par consequent qu'ils se coupent en un point *c* hors de la ligne BO*, &c . . . *48.

Problême.

De l'extremité B *d'une ligne droite* AB *mener du coté qu'on voudra de cette ligne, par ex: du coté de* C, *une autre ligne droite* BC *qui fasse avec elle un angle* ABC *égal à un angle donné* abc. 50. f.38.&39

1ò. De la pointe *b* de l'angle donné *abc* prenez à discretion sur ses jambes deux lignes égales *ba*, *bc*; & menez la droite *ac*. 2ò. Du point *B*, & avec le raïon *BA* égal à *ba*, décrivez du coté de *C* sur la ligne *AB* prolongée par son extremité *B*, le demi cercle *ACD*. 3ò. Du point *A*, & avec le raïon *AC* égal à *ac*, décrivez encore du coté de *c* sur la même ligne *BA*, le demi cercle *ECF*, qui coupera le premier *ACD* en un point *C* hors de la ligne *AB**; parce que *ac* étant moindre que *ab*+*bc*, il s'ensuit évidemment que AE égale à *AC* est moindre que *AD*, par conséquent que ces deux demi cercles sont en partie l'un dans l'autre. 4ò. Du point *B* menez par le point *C* la ligne *BC* qui formera avec la ligne *BA* l'angle *ABC* égal à l'angle *abc*. *48.

Les trois cotés *AB*, *BC*, *CA* du tr: *ABC*, pris un à un sont égaux aux trois cotés *ab*, *bc*, *ca* du triangle *abc*, par la construction; donc l'angle *ABC* du premier triangle est égal à l'angle *abc* du second*. *43.

Rem: Comme on ne décrit les demi cercles *ACD, ECF* que pour trouver leur point de Section *C*, il sufit dans la pratique d'en décrire des arcs qui se coupent.

Problême.

51. *De la pointe* A *d'un angle* BAC *mener une ligne*
fig:40. *droite* AD *qui le divise en deux parties égales* BAD, DAC.

Premiérement, de la pointe *A* de l'angle donné prenez à discretion sur ses jambes deux parties égales *AB, AC*; 2ò. Des points *B, C*, & avec des raïons égaux *BD, CD* plus grans chacun que la moitié de la distance *BC*, décrivez de l'autre coté de cette distance par raport au point *A*, les arcs indéfinis *ED*, *FD* qui se couperont en un point *D* hors du même inter-
*49. vale *BC*.* 3ò. Du point A menez par le point *D* la ligne *AD* qui divisera l'angle donné *BAC* en deux parties égales *BAD, DAC*.

Les trois cotés *AB, BD, DA* du tr: *ABD*, pris un à un, sont égaux aux trois cotés *AC, CD, DA* du tr: *ACD*, par la constru ction. Donc l'angle *BAD* du premier tr: est égal à l'angle *DAC*
*43. du second *.

Définitions.

52. Quand deux lignes droites *BAC*, *DAE* se
f:41. coupent, elles forment au point *A* de leur section, quatre angles dont ceux qui n'ont aucune jambe commune, comme *BAD*, *CAE*, s'apellent angles *oposés au sommet* ou *par la pointe*.

Theo-

Theorême.

Les Angles BAD, *CAE opoſés par la pointe ſont égaux.* 53. fig.42.

Aïant décrit du point *A* un cercle *BDCEB* qui coupe les deux lignes *BAC*, *DAE* aux points *B*, *D*, *C*, *E*, on connoitra que les ſommes *BD*+*DC*, *DC*+*CE* ſont égales chacune à la moitié de la circonférence *BDCEB**. D'ou l'on conclura que *BD*+*DC*=*DC*+*CE*; & en retranchant de part & d'autre l'arc *DC*, que *BD*=*CE*; par conſéquent que l'angle *BAD* eſt égal à l'angle *CAE*. *29.

Définition.

Lorſque la meſure *BC* d'un angle *A* eſt le quart de la circonférence, ou ce qui revient à la même choſe, lors qu'elle eſt de 90. degrés, cet angle porte le nom d'angle *droit*. Lorsqu'elle eſt moindre, ou plus grande, il porte celui d'angle *oblique*. Si elle eſt moindre, il eſt dit *aigu*; & ſi elle eſt plus grande, *obtus*. 54. f. 43, 44, & 45.

Rem: Tous les angles droits ſont donc égaux.

Corollaires.

Si d'un même point A *on mene pluſieurs lignes* AB, AC, AD, AE, AF, AG *qui forment tout autour de ce point A, chacune avec la voiſine, pluſieurs angles* BAC, CAD, DAE, *&c; la ſomme de tous ces angles ſera égale à celle de quatre droits, ou, ce qui revient au même, elle aura pour ſa meſure la circonférence entière* BCDEFGB. 55. f.46.

Supo-

56. *Suposé que d'un même point moïen* A *d'une ligne*
f: 47. *droite* BAC *on mene d'un même coté de cette ligne autant d'autres lignes* AE, AD *qu'on voudra, elles formeront entr'elles, & avec les deux parties* AB, AC *de cette ligne* BAC, *chacune avec sa voisine, plusieurs angles* BAE, EAD, DAC, *dont la somme sera égale à celle de deux droits; c'est à dire, qu'elle aura pour sa mesure un arc* BEDC *égal a la moitié de*
*29. *la circonférence* *.

Définition.

57. Si d'un point moïen *A* d'une ligne droite
f: 48. *BAC* on mene par un point *D* pris hors de cette ligne, une autre ligne droite *AD*, elle formera avec la premiére *BAC*, deux angles *BAD*, *DAC* qui sont nommés angles *de suite*.

Rem: Suivant le dernier Corollaire, la somme de deux angles de suite est donc égale à celle de deux droits; c'est à dire, qu'elle a pour sa mesure un arc *BDC* égal à la moitié de la circonférence.

Corollaire.

58. *Suposé que l'un de deux angles de suite* BAD,
f: 48. DAC *soit aigu ou obtus, l'autre est au contraire obtus ou aigu.*

Theorême.

59. *Suposé que la somme de deux angles* BAD, DAC
f: 49. *qui ont une jambe commune* AD, *& dont les deux autres jambes* AB, AC *sont de diferens cotés par raport à celle là, soit égale à la somme de deux droits;*

ces deux autres jambes AB, AC *ſont en ligne droite l'une à l'égard de l'autre.*

La ſomme des deux angles *BAD*, *DAC* étant égale à celle de deux droits, ſa meſure *BDC* eſt donc la moitié de la circonférence *BDCEB*. Cela poſé, puiſque la ligne *BA* prolongée par le centre *A* juſques à cette circonférence, la doit couper en deux parties égales* *29. il eſt clair qu'elle doit la rencontrer en *C*; par conſéquent que *AC* eſt en ligne droite avec *BA*

CHAPITRE II.

De l'angle droit ou des lignes perpendiculaires.

Définition.

Lorſque deux lignes droites, comme *BA*, *DA*, *fig:* 50, ou *BAC*, *DA*, *fig:* 51, ou *BAC*, *DAE*, *fig:* 52. forment un angle droit *BAD*, elles ſont dites *perpendiculaires* l'une à l'autre. Lorſqu'elles forment un angle plus petit, ou plus grand qu'un droit, on dit qu'elles ſont *obliques*, ou *inclinées* l'une à l'autre. 60. fig: 50. 51 & 52.

Corollaires.

Supoſé qu'une ligne droite DAE *ſoit perp: à une autre* BAC, *tous les angles qu'elle peut former avec elle ſont des angles droits.* 61. f: 52.

La ligne *DAE*, étant perp: à la ligne *BAC*, forme donc avec elle un angle droit *BAD*. Cela

Cela posé, puisque les angles *BAD, DAC*.
56. pris ensemble, sont égaux à deux droit, & que le premier *BAD* est droit, il s'ensuit manifestement que le second *DAC* est pareillement droit. On prouvera de la même maniére que les angles *CAE, EAB* sont aussi droits.

62. *Si une ligne droite* DAE *forme avec un autre* BAC, *d'un même coté* D *de cette ligne* BAC, *deux angles*
f: 52. *égaux* BAD, DAC, *elle lui est perpendiculaire.*

Les angles *BAD, DAC*, pris ensemble,
56. sont égaux à deux droits. Or ces deux angles sont égaux entr'eux, par la suposition; donc chacun d'eux est un angle droit.

63. *On ne peut mener du même point* A *d'une ligne droite* BAC *qu'une perpendiculaire* AD *à cette*
f: 53. *ligne* BAC.

C'est une suite évidente de ce que les angles *BAD, DAC* formes par la ligne *AD* menée du point *A* perpendiculairement a la droite *BAC*, & par cette ligne *BAC*, doivent être
61. droits, & par consequent égaux.

64. *Suposé que d'un même point* D *hors d'une ligne droite* BAC, *on mêne à cette ligne* BAC *une perp:* DA,
f: 54. *& une autre ligne* DB; *cette derniére ligne* DB *formera avec elle, du coté de la perp:* DA, *un angle aigu* DBA.

l'Angle *DBA* du triangle *DBA* est moindre
*46. que l'angle exterieur *DAC*.* Or l'angle *DAC*
61. est droit; Donc l'angle *DBA* est aigu.

65. *D'un même point* D *hors d'une ligne droite* BAC *on ne peut mener qu'une perp:* DA *à cette ligne* BAC.
f: 54.

Tout

Tout point D *d'une ligne droite* DA *perp: à une autre* BAC, *est également éloigné de deux points quelconques* B, C *de cette derniére ligne* BAC, *pris de part & d'autre, & à égale distance du point* A *où elle est rencontrée par la perp:* DA. 66. Fig. 55.

Car la ligne *DA* est un coté commun aux deux tr: *DAB*, *DAC*; *AB*=*AC*, par la suposition; & l'angle DAB est égal à l'angle *DAC**; *61.
par consequent *DB*=*DC** *41.

Theorême.

Si d'un même point D *hors d'une ligne droite* FBA *on mene à cette ligne* FBA *une perp:* DA, *& deux autres lignes droites* DB, DF *d'un même coté de cette perp:*; 1ò. *la perp:* DA *sera moindre que chacune de ces deux autres lignes* DB, DF; 2ò. *Celle des mêmes deux autres lignes* DB, DF *qui sera la plus proche de la perp:* DA, *savoir* DB, *sera moindre que la plus éloignée* DF. 67. fig. 56.

Prolongez la perp: *DA* par le point de rencontre A, jusques à ce que le prolongement *AE* soit égal à *AD*; & menez les droites *BE*, *FE*. Cela posé, puisque *FBA* est perp: à *DAE*, & que *AD*=*AE*, il s'ensuit que *BD*=*BE**, *56.
& que *FD*=*FE*; par conséquent, que comme *DA* est la moitié de *DE*, *DB* est celle de *DB*+*BE*, & *DF* celle de *DF*+*FE*. Or 1ò. *DE*< *DB*+*BE**; ainsi *DA*<*DB*; & par la même raison *DA*<*DF*. 2ò. *DB*+*BE*<*DF*+*FE**; *11. *40.
par conséquent *DB*<*DF*.

Corollaire.

La perp: DA *menée d'un point* D *situé hors d'une ligne droite* FBA, *à cette ligne* FBA, *est la plus courte de* 68. f. 56.

de toutes les lignes qu'on puisse mener de ce point A à cette ligne FBA.

Definition.

69. f: 56. La perp: *DA* menée d'un point *D* situé hors d'une ligne droite *FBA*, à cette ligne *FBA*, s'apelle la *Distance* de ce point *D* à cette ligne *FBA*.

Theorême.

70. f: 57. 58. & 59. *Suposé que deux points* D, E *d'une ligne droite* DE *soient également éloignés chacun de deux points* B, C *d'une autre ligne droite* BC; *la premiére ligne* DE, *prolongée s'il est necessaire, coupe perpendiculairement la seconde* BC *en un point* E *ou A qui est au milieu de ces deux derniers points B, C.*

Où l'un des deux points *D,E*, savoir *E* fig: 57, est sur la ligne *BC*; auquel cas *DE* coupe *BC* en ce point *E*: ou ces deux points *D*, *E* sont l'un & l'autre hors de la ligne BC, f: 58 & 59; & dans ce cas *DE*, prolongée lorsque les points *D*, *E* sont l'un & l'autre d'un même coté de la ligne *BC*, coupe *BC* en un point *A* diferent du point *E*.

Dans le premier cas, fig: 57, 1ò *EB* est déja égale à *EC*, par la suposition. 2ò. Puisque la ligne *DE* est un coté commun aux deux tr: *DEB*, *DEC*; que *EB*=*EC*, & que *DB*=*DC*, par la supposition. il s'ensuit que ces deux triangles sont entiérement é-
*43. gaux, & que l'angle *DEB* = l'angle *DEC**; par con-
*62. séquent que *DE* est perp: a *BC**.

Dans le second cas. fig: 58. & 59, le tr: *DEB* est en-
*43. core entiérement égal au tr: *DEC**, & l'angle *ADB* du

du premier est égal a l'angle *ADC* du second. Or puisque la ligne *DA* est un coté commun aux deux tr: *ADB*, *ADC* ; que *DB* = *DC* par la suposition; & que l'angle *ADB* = l'angle *ADC*, comme on vient de le voir, il s'ensuit que ces deux tr: sont entierement égaux * ; & 1ò. que *AB* = *AC* ; 2ò. que l'angle *DAB* = l'angle *DAC* ; par consequent, que *DA* est perpendiculaire à *BC* *. *41. *62.

Problême.

D'un point donné A *sur une ligne droite* BAC, *élever une perp:* AD *à cette ligne* BAC. 71. f: 60.

Premiérement, prenez des le point *A* sur la ligne *BAC*, de part & d'autre du point *A*, deux longueurs égales *AB*, *AC*. 2ò. Des les points *B*, *C*, & avec des raïons égaux *BD*, *CD*, plus grans chacun que la moitié de *BC*, décrivez du même coté de *BC* les arcs indéfinis *FD*, *GD* qui se couperont en un point *D* hors de la ligne *BC* *, 3ò. Du point *A* menez par le point *D*, la droite *AD* ; je dis qu'elle sera perp: à *BAC*. *49.

Par la construction, les points *A*, *D* sont également éloignés chacun des points *B*, *C* ; c'est a dire *AB* = *AC*, & *DB* = *DC*. Donc *AD* est perp: *BC* *. *70.

Problême.

Mener à une ligne droite donnée BC, *une perp:* DE *qui la coupe en deux parties égales* BA, AC. 72. f: 61.

1ò. Des points *B*, *C*, & avec des raïons égaux, *BD*, *CD*, *BE*, *CE* plus grans chacun que la moitié de *BC*, décrivez de part & d'au-

tre de la ligne *BC* les arcs indefinis *FD*, *GD*, *HE*, *IE*, dont les deux premiers *FD*, *GD* se couperont en un point *D* hors de *BC*, & les
*49. deux dernier *HE*, *IE* en un autre point *E**. 2°. Menez par ces point de Section *D*, *E*, la droite *DE*. Je dis qu'elle coupera perpendiculairement la ligne *BC* en deux parties égales *BA*, *AC*.

Les deux points *D*, *E* de la ligne droite *DE* sont également éloignés chacun des deux points *B*, *C* de la ligne droite *BC*, par la con-
*70. struction. Donc *DE* coupe perp:* &c.

Problême.

73. *Diviser une ligne droite* BC *en deux parties*
f: 61. *égales* BA, AC.

Il est évident que pour resoudre ce problême, il n'y a qu'a mener la ligne droite *DE* qui coupe perpendiculairement la ligne *BC*
*72. en son milieu *A**.

Lemme.

74. *Un cercle* BDCB, *& une ligne droite* BC *qui se*
f: 62. & *coupent, se coupent en deux points* B, C, *& ne*
63. *se rencontrent en aucun autre point.*

Si la ligne *BC* coupe le cercle *BDCB*, il est deja clair qu'elle le coupe au moins en deux points *B*, *C*. Ainsi il n'y a plus qu'a faire voir qu'elle ne le rencontre en aucun autre point; ce qui sera bien évident, si, comme je vais le démontrer, tout point *E* ou *F* de sa ligne *BC* situé sur sa partie *BC* est dans la circonférence

rence *BDCB*, & que tout point *G* de la même ligne *BC* ſitué de part ou d'autre de ſa partie *BC*, ſoit hors de la même circonférence *BDCB*.

Premiérement, ſupoſé que *BC* paſſe par le centre *A* du cercle, le point *E* eſt dans la circonférence *BDCB*, & le point *G* en eſt déhors*. fig:62. *28.

En ſecond lieu ſupoſé que *BC* ne paſſe pas par le centre *A*, on menera du point *A* la droite *AF* au milieu *F* de *BC*, les raïons *AC*, *AB*, & les droites *AE*, *AG*. Cela poſe, puiſque *FB* == *FC*, & que *AB* == *AC*, il s'enſuit que *AF* eſt perp: à *BC**. Donc 1°. *AF* & *AE* ſont moindres chacune que le raïon *AB**; par conſequent les points *F*, *E* ſont dans la circonférence *BDCB*. 2°. *AG* > *AB*; ainſi le point *G* eſt hors de la même circonférence. *70. *67.

Problême.

75. *D'un point donné* A *hors d'une ligne droite* BC *mener une perp:* AF *à cette ligne* BC. f: 64.

1°. Du point *A* & avec une longueur *AK* priſe dés ce point *A* à un autre point quelconque *K* ſitué de l'autre coté de *BC* par raport au point *A*, decrivez le cercle *BKC* qui coupera la droite *BC* en deux points *B*, *C**. 2°. Des points *B*, *C* & avec les raïons égaux *BE*, *CE* plus grans chacun que la moitié de *BC*, decrivez de l'autre coté de *BC* par raport au point *A* les arcs indéfinis *HE*, *IE* qui ſe couperont en un point *E* hors de la même ligne *BC**. 3°. Du point *A* menez par le *74. *49.

point *E* la droite *AFE* qui coupera perpendiculairement la droite *BC* en un point *F*.

Si l'on mene les raïons *AB*, *AC*, *BE*, *CE*, on verra que *AB* étant égale à *AC*, & *EB* à *EC*, par la construction, la droite *AE* coupe
*70. perpendiculairement *BC* en un point *F**; ce qui est tout ce qu'il falloit démontrer.

Theorême.

76. *Si d'un point quelconque* C *de l'une des jambes*
f: 65. *d'un angle aigu* CAB, *pris ailleurs qu'a la pointe de l'angle ; on mene une perp:* CB *à l'autre jambe, cette perp:* CB *tombera dans cet angle* CAD.

Prolongez *AD* par son extremité *A*, & menez du point *C* à un point quelconque *E* de ce prolongement la droite *CE*.

L'angle éxterieur *CAD* du triangle *CAE* est
*46. plus grand que l'interieur *CEA**. Or le premier *CAD* de ces deux angles est aigu, par la supositiоn, donc le second *CEA* est aussi aigu. Maintenant, puisque les angles *CAD*, *CEA* sont aigus, il est clair que la perp: *CB* menée du point *C* à la jambe *AB* ne peut
*61. tomber ni en *E* ni en *A**; par consequent qu'elle doit tomber en quelque point *B* de la jambe *AD* diferent du point *A*, & par la même dans l'angle *CAD*.

Corollaire.

77. *La perpendiculaire* CB *menée d'un point* C *de*
f: 66. *l'une des jambes d'un angle obtus* DAC, *pris ailleurs qu'a la pointe, sur l'autre jambe* DA, *tombe hors de cet angle.*

SEC-

SECTION IV.

Des Paralleles.

Définition.

Aiant mis ſur une ſurface plane un angle droit *CAB* de maniére que l'une de ſes jambes, ſavoir *AB*, ſoit couchée le long d'une ligne droite *ABab* menée ſur la même ſurface plane; ſi on le fait mouvoir en ſorte que cette jambe *AB* gliſſe le long de cette ligne *ABab*, un point quelconque *C* de ſon autre jambe *A* decrira une ligne droite * *Cc* qui eſt dite *parallele* à la premiére *ABab*. 78. *fig.* 67. *44.

Corollaires.

Par un même point C *donné hors d'une ligne droite* ABab *on ne peut mener qu'une parallele* Cc *à cette ligne* ABab. 79. *fig.* 67.

Parce 1°. que du point C on ne peut mener qu'une perp: *CA* à la ligne *ABab**; 2°. que le point *C* de la jambe *AC* de l'angle droit *CAB* ne décrit qu'une ligne *Cc*; 3°. que les lignes décrités par les autres points de cette jambe *AC* ne paſſent pas par le point C. *65.

Une ligne Cc *parallele à une autre* ABab *eſt toute du même coté par rapport à cette ligne* ABab, *&* *ne la rencontre point.* 80. *f.* 67.

Supoſé

81. *Supoſé qu'une ligne* DF *en coupe perpendiculairement une autre* ABab, *à laquelle une ligne indéfinie*
fig.67. Cc *ſoit parallele ; cette perp:* DF *prolongée indéfiniment du coté de la parallele* Cc, *ira auſſi la couper.*

82. *Toutes les perp:* ca *menées d'une ligne* Cc *parallele à une autre* ABab, *à cette autre ligne* ABab, *ſont égales*
fig.67. *entr'elles.*

Car elles ſont égales chacune à la partie *CA* de la jambe *CA* dont l'extremité *C* à décrit la parallele *Cc*.

83. *Une partie quelconque* Cc *d'une ligne* Cc *parallele à une autre* ABab *eſt égale à la partie* Aa *de cette der-*
fig.67. *niére ligne* ABab, *compriſe entre les perp:* CA, ca *menées des extremités* C, c *de la premiére partie* Cc *à cette même derniére ligne* ABab.

Pendant que la pointe *A* de l'angle *CAB* parcourt la longueur *Aa*, le point *C* de la jambe *AC*
*44. décrit la longueur *Cc*. Ainſi *Cc*=*Aa**.

84. *Supoſé que deux points* C, c *d'une ligne dr:* Cc *ſoient du même coté d'une autre ligne dr:* ABab, *& que les*
fig.67. *perp: CA,* ca *menées de ces deux points* C, c *à cette autre ligne A*Bab *ſoient égales; la premiére ligne* Cc *eſt parallele à la ſecondé* ABab.

Car ſi l'angle droit *CAB* vient à ſe mouvoir du coté de *c*, enſorte que ſa jambe *AC* gliſſe le long de la droite *ABab*, il eſt clair, 1°. que lorſque ſa pointe *A* ſera parvenue au point *a*, ſa jambe *AC* tombera ſur *ac*, puiſque les angles *CAB*, *cab* ſont droits. 2°. Que le point *C* tombera ſur le point *c*, puiſque *AC*=*ac*, par la ſupo-

ſupoſition. 3°. Par conſéquent que la droite parallele à la ligne *ABab*, que le point C décrira dans ce mouvement, paſſera par les deux points *C*, *c* par leſquels paſſe la droite *Cc*; & qu'ainſi la droite *Cc* eſt la même que cette parallele*. *7.

Theorême.

La perp: CA *menée d'un point quelconque* C *d'une ligne* CD *parallele à une autre* AB, *à cette derniére ligne* AB, *eſt auſſi perp: à la parallele* CD. 85. fig.68.

D'un autre point *D* de la ligne *CD* menez à la ligne *AB* la perp: *DB*; & joignez les points *A*, *D* par la droite *AD*. La ligne *AD* eſt un coté commun aux triangles *ACD*, *DBA*; *AC*=*DB**; & *CD*=*BA**. Donc ces deux tr: ſont entiérement égaux, & l'angle *ACD*= l'angle *DBA**. Or l'angle *DBA* eſt droit, par la conſtruction; donc l'angle *ACD* eſt auſſi droit; ainſi *AC* eſt perp: à *CD*. *82. *83 *43.

Theorême.

Si une ligne CD eſt parallele à une autre AB, cette derniére ligne AB *eſt parallele à la premiére CD; c'eſt à dire que la derniére ligne AB peut être conſiderée comme décrite par raport à la premiére CD ſuivant la définition des paralleles.* 86. fig.69.

De deux points quelconques *C*, *D* de la dr: *CD* menez les perp: *CA*, *DB* à la droite *AB*.

1°. Puiſque la ligne *CD* eſt toute du même coté de la ligne *AB**, les deux points *A*, *B* de la ligne *AB* ſont d'un même coté de la ligne *80.

 CD.

CD. 2°. Puisque *CD* est parallele à *AB*, par la supposition, les dr: *CA*, *DB* perp. à *AB* sont aussi
*85. *82 perp: à *CD**, & de plus égales entr'elles *. 3°.
*84. Donc *AB* est parallele à *CD**.

Définitions.

87. Lors qu'une ligne dr: *AD* en coupe deux autres *EF, GH,* elle forme avec elles huit an-
fig.70. gles dont les quatre qui sont entre ces deux lignes, s'apellent angles *intérieurs* ; & les quatre autres angles *extérieurs*.

Les Angles intérieurs, comme *EBC*, *BCH*, formés, le premier *EBC* par une des lignes coupées, & d'un coté de celle qui les coupe ; le second *BCH*, par l'autre ligne coupée, & de l'autre coté de la coupante, s'apellent angles *alternes*.

De tous les angles dont on vient de parler, ceux qui sont d'un même coté de la ligne coupante, par ex: *EBC*, *BCG*, mais formés, le premier par une des lignes coupées, & le second par l'autre, se nomment angles *oposés de même coté*.

Theorême.

88. *Si une ligne* AD *coupe deux paralleles* EF, GH,
les angles alternes EBC, BCH ; FBC, BCG *sont*
fig.71.& 72. *égaux*.

Suposé premiérement que *AD* soit perp: à l'une des deux paralleles, par ex:, à *GH*, elle
*85. l'est à l'autre *EF**; ainsi tous les angles qu'elle
*61. forme avec ces deux lignes sont droits *, & par

par conséquent égaux, Dans ce cas, le Theorême est donc bien évident.

Suposé, en second lieu, que AD soit oblique à GH, on menera des points C, B, les perp: CE, BH à GH, & on aura deux triangles BCE, CBH que l'on comparera l'un avec l'autre. On verra que la ligne BC est un coté commun aux deux ; que EB = CH*; & que EC = BH*: D'où l'on conclura que l'angle EBC = BCH*: & par conséquent que l'angle CBF est aussi égal à l'angle BCG, puisque l'angle EBC + l'angle CBF = l'angle BCH + l'angle BCG*. fig. 72. *83. *82. *43. *56.

Corollaires.

89. *Les angles extérieurs sont égaux aux intérieurs oposés de même coté ; par ex:* ABF = BCH. fig. 73.
Car ABF = EBC* *53.

90. *Les Angles intérieurs oposés de même coté* FBC, BCH, *pris ensemble, sont égaux à deux droits.*
Parceque FBC est égal à son alterne BCG, & que BCG + BCH = deux angles droits* fig. 73. *56.

91. *Lors qu'une ligne AD en coupe deux autres EF, GH qui ne sont pas paralleles. 1ò. les angles alternes EBC, BCH sont inégaux; 2ò. Les angles extérieurs, & leurs intérieurs oposés de même coté, par ex: ABF, BCH, le sont aussi; 3ò. Les angles intérieurs oposés de même coté FBC, BCH, pris ensemble, diférent de deux droits.* fig. 74.
Il n'y a pour s'en convaincre qu'a imaginer la ligne eBf menée par le point B parallelement à GH.

92. *Suposé qu'une ligne* AD *en coupe deux autres* EF, GH, *& que l'un des trois cas suivans ait lieu, ces* fig. 75.

 deux

deux lignes EF, GH *sont paralleles.* 1°. *Si deux angles alternes* EBC, BCH *sont égaux.* 2°. *Si un angle extérieur* ABF *est égal à son intérieur* BCH *oposé de même coté.* 3°. *Si deux angles intérieurs oposés de même coté* FBC, BCH, *pris ensemble sont égaux à deux droits* .

Problême.

93. *Par un point* B *donné hors d'une ligne* GH *mener une parallele* EF *à cette ligne* GH.
fig.76.

1°. Tirez d'un point *B* à un point quelconque *C* de la ligne *GH* la droite *BC*. 2°. Menez par le point *B* la ligne *EBF* qui fasse l'angle *EBC*
*50. égal à son alterne *BCH**, & qui par conséquent
*92. sera la parallele qu'il falloit mener *.

Theorême.

94. *Deux lignes* EF, GH *paralleles à une troisiéme*
f.77.78. KI *sont paralleles l'une à l'autre.*

Si les lignes *EF, GH,* sont de part & d'autre de la ligne KI à laquelle elles sont paralleles, on imaginera la ligne *AD* qui coupe les deux lignes *FF,GH,* & par conséquent *KI* qui est entre ces deux lignes. Ensuite on considérera
*88. que puisque *EF* est parallele à *KI, EBL*=*BLI**
*53. =*KLC** & que *GH* étant parallele à *KI, KLC*
*88. =*LCH* *: D'où l'on conclura que *EBL* =*LCH*; par conséquent que les lignes *EF,*
*92. *GH* sont paralleles l'une à l'autre*.

Suposé que les lignes *EF, GH* soient du même coté de *KI*, on démontrera de la même maniére

niére que ces deux lignes *EF*, *GH* ſont encore paralleles l'une à l'autre.

Lemme.

Une ligne ef *menée entre deux paralleles* GH, EF, *parallelement à l'une des deux, par ex: à* GH *(& par conſéquent à l'autre* EF, *art.*94.*) peut ſe mouvoir vers l'autre ligne* EF *parallelement à la premiére* GH, *juſques à ce qu'elle la rencontre : & alors elle la couvrira exactement.* 95. fig.79.

Imaginez une ligne *GE* qui ſoit perp: à *GH*, & qui coupe les paralleles *ef*, *EF* à cette ligne *GH*, aux points *e*, *E**, ou elle formera les angles droits *Gef*, *GEF**. Imaginez encore la ligne *eh* qui faſſe avec *ef* l'angle droit *hef*, & qui par conſéquent ſera couchée le long de *EG*. *81. *85.

Il eſt clair que l'angle *feh* peut ſe mouvoir du coté de *EF*, en ſorte que ſa jambe *eh* gliſſe le long de *eG*, & cela juſques a ce que le point *e* tombe ſur le point E. Or 1°. dans ce mouvement, l'angle *feh* étant toujours droit, de même que l'angle *eGH*, la ligne *ef* ſera toujours parallele à GH*. 2°. Lorſque le point *e* tombera ſur le point *E*, tous les autres point de la ligne *ef*, tomberont ſur *EF*, à cauſe des angles droits *hef*, *hEF*. Donc une ligne &c. *92.

Theorême.

Supoſé qu'une ligne DB *en coupe une autre* GH *à laquelle une ligne indéfinie* EF *ſoit parallele, cette premiére ligne* DB *prolongée indéfiniment du coté de la parallele* EF *ira auſſi la couper.* 96. fig,80.

Con-

Concevez que par un point *B* de la ligné *DB* ſitué entre les lignes *EF, GH* il paſſe une ligne indéfinie *ef* parallele à *GH:* Il eſt évident que cette ligne *ef* ſera coupée en *B* par la droite *DB* ; puiſque *DB* formera avec *ef* au point

*88. *B* un angle *eBC* égal à l'angle *BCH**. Maintenant, ſupoſés que *ef* vienne a ſe mouvoir du coté de *EF* parallellement à *GH*, & qu'elle continue juſques à ce qu'elle rencontre *EF*. Il eſt encore évident par la même raiſon, qu'en quelque point *b* de la ligne *DB* que *ef* parvienne dans ce mouvement, elle ſera coupée en ce point *b* par la ligne *DB;* par conſéquent qu'elle ſera coupée par cette ligne *DB,* lorſque rencontrant *EF* elle ſe confondra avec elle. Donc *DB* prolongé indéfiniment du coté de *EF* ira couper *EF*.

Theorême.

97. *Supoſé que deux lignes* EF, CB *forment avec une*

fig. 81. *troiſiéme* EC, *d'un même coté* M *de cette ligne* EC, *& chacune du coté de l'autre, deux angles* FEC, ECB *qui pris enſemble ſoient moindres que deux droits; ces deux lignes* EF, CB *prolongées indéfiniment du coté où elles ſont de la troiſieme ligne* EC, *iront ſe couper.*

Menez par le point *C* la parallele *CH* à *EF*.

Puiſque $FEC+ECB <$ deux droits, par la ſu-

90. poſition, & que $FEC+ECH =$ deux droits, il s'enſuit que $FEC+ECB < FEC+ECH$, par conſéquent que $ECB<ECH$. Or l'angle *ECB* étant moindre que l'angle *ECH,* il en réſulte évidemment que la ligne *CB* coupe la ligne *CH,* & par la même, que les lignes *EF*, *CB* prolon-

*96, gées indéfiniment du coté *M,* iront ſe couper*.

Fin du premier Livre.

LIVRE SECOND.

Des Surfaces.

INTRODUCTION.

Définitions.

Les surfaces qui ſont droites en tout ſens, ſe nomment des *Surfaces planes*, ou ſimplement des *Plans*.

Celles qui ne ſont pas droites en tout ſens, s'apellent des ſurfaces *courbes*. 98.

Une ſurface terminée de toutes parts, de méme qu'un ſolide auſſi terminé de tous cotés, porte le nom de *Figure*. 99.

Lorſque toutes les lignes qui terminent une ſurface, ſont droites, la figure eſt *rectiligne*. Lorſqu'elles ſont courbes, elle eſt *curviligne*. Mais lorſque les unes ſont droites, & les autres courbes, elle eſt *mixte*. 100.

SECTION I.

Des surfaces planes terminées par des lignes droites.

CHAPITRE I.

Des Triangles.

Définition.

f:82. UNe Surface plane *ABC* terminée par trois lignes droites *AB, BC, CA,* s'apelle un *Triangle rectiligne*, ou simplement un *Triangle.*

Corollaires.

101. *Un coté quelconque* AC *d'un triangle* ABC *est moindre que la somme des deux autres* AB, BC*.

*11.

102. *Un coté quelconque* AC *d'un tr:* ABC *est plus grand que la diférence des deux autres* AB, BC.

Car suposé 1°. que les cotés *AB, BC* soient égaux, leur diférence est zero ; Ainsi le coté *AC*, quelque petit qu'il puisse être, est plus grand que cette diférence.

Suposé 2°. que les cotés *AB, CB* soient inégaux, & par exemple, que $CB < AC$, on aura
*11. $AC + CB > AB$; d'où l'on conclura, en retranchant de part & d'autre *CB*, que $AC > AB - CB$.

Lem-

Lemme.

Soient deux points A, M *sur une ligne droite* DO: 103.
Que de ces deux points A,M *on prenne deux raïons* AB
ou AD,MN *ou* MO, *tels* 1°. *que l'un* AB *soit moin-* f:83,&
dre que la somme AO *de la distance* AM *des deux* 85.
points A,M, *& de l'autre raïon* MO; 2°. *mais que le même premier raïon* AB *ou* AD *soit néanmoins plus grand que la diférence* AN *de cette distance* AM, *& de l'autre raïon* MO *ou* MN. *Cela posé, si des deux points* A,M, *& avec les deux raïons* AB, MN, *on décrit du même coté de la ligne* DO *qui passe par les deux points, deux demi cercles* BCD, NCO; *ces deux demi cercles se couperont en un point* C *hors de la même ligne* DO, *& il ne se rencontreront en aucun autre point.*

Il est évident que les demi cercles *BCD,NCO* seront en partie l'un dans l'autre ; par conséquent, qu'ils auront les conditions marquées dans le Lemme *. *48.

Rem: La figure 84 est pour le cas où l'un des deux raïons est égal à la distance des deux points *A,M.*

Problême.

Trois lignes ac, ab, bc, *dont l'une* ac *soit moindre* 104.
que la somme des deux autres ab, bc, *& plus grande*
que leur diférence, étant données; faire un tr: ABC fig. 86.
dont les trois cotés AC, AB, BC, *pris un à un, soient égaux à ces trois lignes* ac, ab, bc.

1°. Menez la ligne *AB* égale à *ab.* 2°. Des points *A, B,* & avec des raions *AC, BC* égaux

 aux

aux lignes *ac, bc,* décrivez d'un même coté de *AB*, les arcs indéfinis, *DC*, *EC* qui se couperont en un point *C* hors de cette ligne *AB**.
*103. 3ò. Menez du point *C* aux points *A,B* les lignes *CA, CB*; & le triangle sera achevé.

Corollaire.

105. *On peut donc toujours faire suivant cette methode, un tr:* ABC *dont les trois cotés* AC, AB, BC, *pris un à un, soient égaux aux trois cotés* ac, ab, bc *d'un autre tr:* abc.
fig. 86. & 87.

Car les cotés *ac*, *ab*, *bc* d'un tr: quelconque *abc* ont les proprietés marquées dans l'énoncé du Problême*.
*101. & 102.

Définition.

106. Si les trois cotés *AB*, *BC*, *CA*, d'un tr: *ABC*, sont égaux, on l'apelle tr: *équilateral*; s'il n'y en a que deux qui le soient, par ex:, *BC, CA*, on le nomme tr: *isoscéle*; s'ils sont tous trois inégaux, il s'apelle tr: *Scalene*.
f:88. f:89. f:90.

Theorême.

107. *Dans un tr:* ABC *qui a deux cotés égaux* CA, CB, *les angles* A, B *oposés a ces cotés égaux* CA, CB, *sont aussi égaux*.
f:91.

Imaginez la ligne *CD* menée du point C au milieu *D* de *AB*.

1ò. Cette ligne *CD* est un coté commun aux tr: *CDA, CDB*; 2ò. *DA*=*DB*, puisque le point *D* est suposé au milieu de *AB*; 3ò. Donc les tr, *CDA*, *CDB* sont entiérement égaux *; & l'an-
*43.

l'angle *A* du premier est égal à l'angle *B* du second.

Corollaire.

Tous les Angles d'un tr: équilateral sont égaux. 108.

Theorême.

Dans un tr: ABC *qui a deux cotés inégaux* CA, CB, *les angles* CAB, ABC *oposés à ces cotés inégaux* CA, CB *sont pareillement inégaux ; & l'angle* CAB *oposé au plus grand* CB, *est aussi plus grand que l'angle* ABC *oposé au moindre* CA. 109. fig. 92.

Prenez dés le point C sur le plus grand coté *CB* une partie *CD* égal au moindre *CA;* & menez la droite *AD*. Puisque *CA*=*CD*, l'angle *CAD*= l'angle *CDA**. Or l'angle *CDA*> l'angle *ABC**; Donc l'angle *CAD*, & à plus forte raison l'angle *CAB* > l'angle *ABC*. *107. *46.

Corollaire.

Dans un triangle ABC *qui a deux angles égaux* A, B, *les cotés* CA, CB *oposés à ces Angles, sont aussi égaux.* 110. fig. 93.

Parce que si les cotés *CA,CB* étoient inégaux, les angles *A, B* le seroient aussi, comme on vient de le voir.

Theorême.

Dans un tr: ABC *qui a deux angles inégaux* A, B, *les cotés* CA, CB *oposés à ces angles inégaux* A, B *sont pareillement inégaux ; & le coté* CB *oposé au* 111. fig. 94.

plus grand A, *est aussi plus grand que le coté* CA *oposé au moindre* B.

1ò. Le coté *CB* ne peut pas être moindre que *CA*; puisque s'il l'étoit, l'angle *A* seroit moin-
*109. dre que l'angle *B**. 2ò. Il ne peut pas non plus être égal à *CA*; parce que s'il etoit, l'angle *A*
*107. seroit égal à l'angle *B**. 3ò. Il faut donc necessairement que *CB*, soit plus grand que *CA*.

Définition.

Si on prolonge un coté *AB* d'un tr: *ABC* par
fig. 95. l'une de ses extremités *B*; ce prolongement *BD* formera avec le coté *CB* qui aboutit à cette extremité *B*, un angle *CBD* qui porte le nom d'angle *extérieur* du tr: *ABC*. Les angles *BCA*, *BAC* du même tr: *ABC*, que ces deux cotes *AB*, *BC* forment avec le troisiéme *CA*, sont nommés les Angles *intérieurs oposés* à cet angle extérieur *CBD*.

Theorême.

112. *Les trois angles d'un tr:* ABC, *pris ensemble, sont*
fig. 96. *égaux à deux droits.*

Par la pointe *C* de l'un de ces trois angles, menez une parallele *FG* au coté oposé *AB*.

*88. L'angle *CAB* est égal à son alterne *FCA**; & l'angle *CBA* est aussi égal à son alterne *BCG*: Ainsi les trois angles du tr: *ABC* sont égaux aux trois angles *FCA*, *ACB*, *BCG*.

Or ces trois derniers angles, pris ensemble,
56. sont égaux à deux droits; Donc les trois angles du tr: *ABC*, pris ensemble sont égaux à deux droits.

Corol-

Corollaires.

Un angle extérieur quelconque CBD *d'un tr:* ABC, *eſt égal à la ſomme des deux intérieurs opoſés* BCA, BAC. 113. *fiſ.*97.

Car puiſque l'angle *ABC* + l'angle *CBD* = deux droits *; & que l'angle *ABC* + l'angle *BCA* + l'angle *BAC* = deux droits comme on vient de le voir, il s'enſuit que l'angle *ABC* + l'angle *CBD* = l'angle *ABC* + l'angle *BCA* + l'angle *BAC*; par conſéquent que l'angle *CBD* = l'angle *BCA* + l'angle *BAC*. *56.

Dans un tr: ABC, *qui a un angle droit* B, *la ſomme des deux autres angles* A, C, *eſt égale à un droit ; & par conſéquent chacun d'eux eſt aigu.* 114. *fig.*98.

Dans un tr: ABC *qui a un angle obtus* B, *la ſomme des deux autres angles* A, C *eſt moindre qu'un droit ; & ainſi, chacun d'eux eſt aigu.* 115. *fig.*99.

Si la ſomme de deux angles A, B *d'un tr:* ABC *eſt égale à la ſomme de deux angles* a, b, *d'un autre tr:* abc ; *le troiſiéme angle* C *du premier tr: eſt égal au troiſiéme angle* c *du ſecond.* 116. *fig.*100. *&* 101.

Définitions.

Si l'un des Angles d'un tr: *ABC*, ſc: *B*, eſt droit, le tr: eſt dit *rectangle* ; s'il eſt obtus, *obtusangle* ; & ſi tous les angles ſont aigus, *acutangle*. 117. *fig.*98, 99 *&* 100.

Le coté *CA* d'un tr: rectangle *ABC*, opoſé à l'angle droit *B*, ſe nomme *l'Hypothenuſe* de ce triangle.

Theo-

Theorême.

fig. 101, & 102. *Suposé que les trois cotés* ab, bc, ca, *d'un tr:* abc, *pris un à un, soient égaux aux trois cotés* AB, BC, CA, *d'un autre tr:* ABC, *ces deux tr: sont égaux dans tout le reste.*

Theorême.

f. 101, & 102. *Suposé que deux cotés* ab, ac *d'un tr:* abc, *pris un à un, soient égaux à deux cotés* AB, AC *d'un autre tr:* ABC, *& que l'angle* a *formé par les deux premiers cotés* ab, ac, *soit égal à l'angle* A *formé par les deux derniers* AB, AC; *ces deux tr: sont entiérement égaux.*

Theorême.

f. 103, & 104. *Lorsque deux cotés* ab, ac *d'un tr:* abc, *pris un à un, sont égaux à deux cotés* AB, AC *d'un autre tr:* ABC; *Si l'angle* a *formé par les deux premiers cotés* ab, ac *est moindre ou plus grand que l'Angle* A *formé par les deux derniers* AB, AC, *le troisiéme coté* bc *du premier tr: est pareillement moindre ou plus grand que le troisiéme coté* BC *du second.*

Theorême.

118. f. 103, & 104. *Lorsque deux cotés* ab, ac *d'un tr:* abc, *pris un à un, sont égaax à deux cotés* AB, AC *d'un autre tr:* ABC; *si le troisiéme coté* bc *du premier tr. est moindre ou plus grand que le troisiéme coté* BC *du second tr: je dis que l'angle* a *oposé au troisiéme coté* bc *du premier triangle, est pareillement moindre ou plus grand que l'angle* A *oposé au troisiéme coté* BC *du second.*

Suposé

Supofé que *bc*<*BC*, je dis donc que l'angle *a* <l'angle *A*. Si l'angle *a* étoit égal à l'angle *A*, ou qu'il fut plus grand, le coté *bc* feroit pareillement égal au coté *BC*, ou plus grand*. Or *41.
puifqu'on fupofe que *bc*<*BC*, il faut donc néceffairement que l'angle *a*< l'angle *A*.

On démontrera de la même maniére, que dans le cas où *bc*>*BC*, l'angle *a*> l'angle *A*.

Theorême.

Si un coté ab *d'un tr:* abc *eft égal à un autre coté* AB *d'un autre tr:* ABC, *& que deux angles* a, b, *ou* b, c *du premier tr:* a b c *pris un à un, foient égaux à deux angles* A, B, *ou* B,C *du fecond triangle, femblablement pofés ; ces deux tr: font égaux dans tout le refte.* 119. f.101,& 102.

Supofé en premier lieu, que les angles *a, b* foient égaux aux angles *A.B;* fi on met le tr:*abc* fur le tr: *ABC* enforte que le point *a* foit fur le point *A,* & que la ligne *ab* foit couchée le long de la ligne *AB,* 1°. le point *b* tombera fur le point *B,* puifque *ab*=*AB.* 2°. La ligne *ac* fe couchera le long de la ligne *AC*, parce que l'angle *a*=l'angle A; & la ligne *bc* fe couchera le long de la ligne BC, puifque l'angle *b*=l'angle *B*: Ainfi le point de concours *c* des lignes *ac, bc* tombera fur le point de concours *C* des lignes *AC,BC.* 3°. Le tr: *abc* couvrira donc exactément le tr: *ABC*; par conféquent ces deux tr: font entiérement égaux.

Supofé en fecond lieu, que les angles *b,c* du tr: *abc* foient égaux aux angles *B,C* du tr: *ABC*, il faut que l'angle *a*=l'angle *A**; ainfi ce cas *116.
retombe dans le précédent.

Theo-

Theorême.

120. *Lorſque l'hypotenuſe* ca *d'un tr: rectangle* abc *eſt*
fig.105. *égale à l'hypotenuſe* CA *d'un autre tr: rectangle*
& 106. ABC, *& que l'un des deux autres cotés du premier tr:, ſcavoir* cb *eſt auſſi égal à l'un des deux autres cotés du ſecond, ſavoir* CB; *ces deux tr:* abc, ABC *ſont entiérement égaux.*

Si on met le tr: *abc* ſur le tr: *ABC* enſorte que le point *b* ſoit ſur le point *B*, & que le coté *ba* ſoit couché le long du coté *BA*; 1°. La ligne *bc* ſe couchera le long de la ligne *BC*, puiſque les angles *abc*, *ABC* ſont droits, & par conſéquent égaux. 2°. Le point *c* tombera ſur le point *C*, puiſque *bc*=*BC*. 3°. La ligne *CB* étant perp: à la ligne AB, l'hypotenuſe *ca* ſe couchera le long de l'hypotenuſe CA; parce que ſi ſon extremité *a* tomboit entre les points A, B de la ligne AB, ou ſur le prolongement *Aa* de BA, par ex: en *a* ou en a, cette hypotenuſe *ca* qu'on ſupoſe égale à *CA*, ſeroit *Ca* ou *Ca*, & par
*67. conſéquent moindre ou plus grande que *CA**. 4°. Le tr: *abc* couvrira donc exactement le tr: *ABC*; ainſi ces deux triangles ſont entiérement égaux.

Theorême.

121. *Lorſque l'hypotenuſe* ca *d'un tr: rectangle* abc *eſt*
f.107, & *égale à l'hypotenuſe CA d'un autre tr: rectangle ABC;*
108. *ſi l'un des deux autres cotés du premier tr: par ex:* cb, *eſt moindre ou plus grand que l'un des deux autres cotés du ſecond tr:, ſavoir* CB, *le troiſiéme coté* ab *du premier tr: eſt au contraire plus grand ou moindre que le troiſiéme coté* AB *du ſecond.*

Puiſ-

Puiſque l'un des deux cotés *cb*, *CB* eſt moindre que l'autre, ſupoſons que ce ſoit *cb*, & il faudra démontrer que *ab* eſt au contraire plus grand que *AB*.

Si on met le triangle *abc* ſur le triangle *ABC* de maniére que le point *b* ſoit ſur le point B, & que le coté *ba* ſoit couché le long du coté *BA*. 1°. le coté *bc* ſe couchera le long du coté *BC*, parce que les angles *b*, *B* ſont ſupoſés droits, & par la même égaux. 2°. L'extremité *c* de ce coté *bc* tombera en quelque point moïen *c* de *BC*, puiſque $bc < BC$. 3°. L'extremité *a* de l'hypotenuſe *ca* tombera en quelque point a du prolongement *A*a de *BA*. Car puiſque *AB* eſt perp: à *CB*, ſi le point *a* tomboit ſur le point *A*, l'hypotenuſe *ac* qu'on ſupoſe égale à *AC*, ſeroit *Ac*, & par conſéquent moindre que *AC**: Et puiſque *CB* eſt perp: à *AB*, ſi l'extremité *a* de l'hypotenuſe *ca* tomboit en quelque point moïen *m* de *AB*, cette hypotenuſe ſeroit *cm*; Par conſéquent elle ſeroit moindre que *cA**, qui eſt elle même moindre que *CA*. 4°. Le coté *ab* eſt donc plus grand que le coté *AB*.

* 67.

* 67.

CHAPITRE II.

Des Quadrilatéres.

Définition.

122. UNe ſurface plane *ABCD* terminée par quatre lignes droites, porte le nom général de *Quadrilatere*. *f.*109.

La ligne droite *AC* qui joint les pointes *A, C* de deux angles oposés d'un quadrilatére, s'apelle *Diagonale.*

Theorême.

123. *Les quatre angles d'un quadrilatére* ABCD, *pris ensemble, sont égaux à quatre droits.*
fig. 110.

Menez la diagonale *AC.*

Les six angles des tr: *ABC, ACD* Pris ensem-
*112. ble, sont égaux à quatre droits *. Or ces six angles sont évidemment les quatre du Quadrilatére *ABCD*; donc les quatre angles du quadrilatére *ABCD*, pris ensemble, sont égaux à quatre droits.

Définition.

124. Un quadril: *ABCD* dont les cotés oposés *AB, DC, & AD, BC* sont paralleles, s'apelle *Parallelogramme.*
fig. 110.

Theorême.

125. *La Diagonale* AC *d'un Parallelogramme* ABCD *le divise en deux triangles* ACD, CAB *entiérement égaux.*
fig. 110.

1°. Cette diagonale *AC* est un coté commun aux tr: *ACD, CAB.* 2°. Puisque *DC* est pa-
*88. rallele à *AB*, l'angle *ACD* = l'angle *CAB**.
3°. Puisque *AD* est parallele à *BC*, l'angle
*88. *CAD* = l'angle *ACB**. 4°. Donc ces deux tr:
*119. *ACD, CAB* sont entiérement égaux *.

Co-

Corollaire.

Les cotés opoſés AB, DC, & AD, BC d'un Parallelogramme ABCD, ſont égaux. 126. fig. 110.

Theorême.

Si les cotés opoſés AB, DC, & AD, BC d'un quadrilatére ABCD ſont égaux, ils ſont paralleles. 127. fig. 110.

Menez la diagonale AC.

Cette diagonale *AC* eſt un coté commun aux 2 triangles *ACD, CAB*; *AB*=*DC*, par la ſupoſition, & *AD*=*BC*: Donc ces deux tr: ſont égaux dans tout le reſte*. Ainſi l'angle *ACD*=l'angle *CAB*; par conſéquent les lignes *AB*, *DC* ſont paralleles*: De même l'angle *CAD*= l'angle *ACB*; par conſéquent les lignes *AD,BC* ſont paralleles. *43. *92.

Problême.

Conſtruire un Parallelogr: ABCD *qui ait l'un de ſes angles ſc:* A, *égal à un angle donné* a, *& les cotés* AB, AD *qui forment cet angle* A, *égaux à deux lignes données* ab, ad. 128. fig. 111.

1°. Menez la ligne AB que vous ferez égale à *ab*. 2°. De l'extremité *A* de cette ligne *AB* menez la ligne *AD* qui faſſe avec elle au point *A* l'angle *A* égal à l'angle donné *a**, & qui ſoit égale à *ad*. 3°. Des points *B, D* & avec des raïons *BC, DC*, qui ſoient, le premier *BC* égal à *AD*, & le ſecond *DC* égal à *AB*, decrivez de l'autre coté de la ligne *DB* par report au point *A*, les arcs indéfinis *EC, FC*, qui ſe *50.

*103. couperont en un point *C* hors de la ligne *DB**
4ò. Des points *B, D* menez à ce point de section *C*, les lignes *BC*, *DC* qui formeront avec les deux premiéres *AB*, *AD* un quadrilatére
*127. *ABCD* qui sera parallelogramme *, & qui aura évidemment les deux autres conditions marquées dans le Problême.

Theorême.

129. *Lorsque deux cotés oposés* AB, DC *d'un quadril:*
fig.112. ABCD *sont égaux & paralleles, ce quadril: est un Parallelogramme ; c'est à dire que les deux autres cotés* BC, AD *sont aussi paralleles.*

Menés la diagonale AC

1ò. La ligne *AC* est un coté commun aux tr: *ACD, CAB*; 2ò. CD=AB, par la suposition ; 3ò. Puisque DC est suposée parallele à
88. AB, l'angle ACD=l'angle CAB 4ò. Ainsi
41. ces deux tr: sont entiérement égaux, & l'angle DAC=l'angle ACB ; par conséquent les
*92. lignes AD,BC sont paralleles *.

Theorême.

130. *Les angles oposés d'un Parallelogr:* ABCD, *par ex:*
fig.112. *les angles* DAB, BCD *sont égaux.*

Menez la diagonale *AC*. 1ò. *AD* étant pa-
*88. rallele à *BC*, l'angle *DAC*=l'angle *ACB**; 2ò. *DC* étant parallele à *AB*, l'angle *CAB*= l'angle *ACD*. 3ò. Donc l'angle *DAB*=l'angle *DCB*.

Theorême.

131. *Suposé qu'un angle* a *d'un Parallelogr:* abcd *soit égal*

gal à un angle A *d'un autre Parallelogr.* ABCD, *&* *fig.* 113.
que les deux cotés ab, ad *qui forment le premier* *&* 114.
angle a, *pris un à un, ſoient égaux aux cotés* AB, AD *qui forment le ſecond* A; *ces deux Parallelogr: ſont entiérement égaux.*

Menez le Paral: *abcd* ſur le Paral: *ABCD* enſorte que le point *a* ſoit ſur le point *A*, & que la ligne *ab* ſoit couchée le long de la ligne *AB*, 1ò. Le point *b* tombera ſur le point *B*, puiſque *ab*=*AB*. 2ò. La ligne *ad* ſe couchera le long de la ligne *AD*, parce que l'angle *a* = l'angle *A*; & le point *d* tombera ſur le point *D*, parce que *ad*=*AD*. 3ò. La ligne *dc* ſe couchera le long de la ligne *DC*, & la ligne *bc* le long de la ligne *BC*;* par conſé- *79.
quent le point *c* tombera ſur le point *C*. 4ò. Le Parallelogr: *abcd* couvrira donc exactément le Parallelogr: *ABCD*; ainſi ces deux Parallelogr: ſont entiérement égaux.

Définition.

Un Parallelogramme *ABCD* dont un angle 132.
A eſt droit, s'apelle Parallelogr: *rectangle*, ou
ſimplement *Rectangle*. *fig.* 115.

Un Parallelogr: *ABCD* dont un angle *A* eſt *fig.* 116
oblique, c'eſt à dire, moindre ou plus grand qu'un angle droit, ſe nomme un Parallelogr: *incliné*.

Theorême.

Tous les angles d'un Parallelogr: rectangle ABCD 133.
ſont droits. *fig.* 115.

Que l'angle *A* du rectangle *ABCD* ſoit celui

lui qu'on supose droit. 1ò. Puisque les lignes *AB*, *DC* sont paralleles, l'angle *A* + l'angle
*90. *D* = deux droits*. Or l'angle *A* est droit par la suposition ; donc l'angle *D* est aussi droit. 2ò. Puisque les lignes *AD*, *BC* sont paralleles, & que les angles *A*, *D* sont droits, il s'ensuit de la même maniére que les angles *B*, *C* sont pareillement droits.

Theorême.

134. *Tous les angles d'un Parallelogr: incliné* ABCD
fig.116. *sont obliques ; deux oposés* A, C *sont aigus, & les deux autres* B, D *sont obtus.*

Que l'angle A du Parall. ABCD soit celui qu'on supose oblique, & que, par ex: cet angle A soit aigu. 1ò. Puisque les lignes AB, DC sont paralleles, l'angle A + l'angle D = deux
90. droits. Or l'angle A est aigu, par la suposition ; donc l'angle D est obtus. 2ò. Puisque l'angle A = l'angle C, & que l'angle D = l'an-
130. gle B, il est évident que les deux angles A, C sont aigus, & que les deux autres D, B sont obtus.

Définition.

135. Un Parall: rectangle *abcd* dont les cotés *ab*,
fig.117. *ad* qui forment l'angle droit *a*, sont égaux, porte le nom de *Quarré*.

Theorême.

136. *Tous les cotés d'un quarré* abcd *sont égaux.*

fig.117. Que les cotés *ab*, *ad* du quarré *abcd*, soient ceux

ceux que l'on ſupoſe égaux, on aura *ab*=*dc*, & *ad*=*bc**, d'ou l'on conclura que ces quatre cotés ſont égaux. *126.

Theorême.

Les quarrés abcd, ABCD *des lignes égales ab, AB ſont égaux.* 137. *fig.* 117. & 118.

Car l'angle *a*=l'angle A; *ab*=AB par la ſup:; & *ad*=AD, puiſque ces deux lignes ſont égales aux lignes *ab*,AB*, qu'on ſupoſe égales entr'elles. Donc le quarré *abcd*=ABCD*. *136. *131.

CHAPITRE III.

Des Parallelogrammes & des Triangles comparés par raport a leurs ſurfaces.

Définitions.

Si d'un point *d* de l'un des cotés *dc* d'un Parallelogramme *abcd*, on mene au coté opoſé *ab* une perp: *df*, cette perp: *df* ſera la *Hauteur* du Parallelogr: *abcd*; & ce coté opoſé *ab* en ſera la *Baze*. 138. *fig.* 119.

Theorême.

Lorſque les bazes ab, AB, *& les hauteurs* df, DF *de deux Parallelogr:* abcd, ABCD *ſont égales, ces deux Parallelogr: ſont égaux en ſurface,* 139. *f*:119. & 120; 121 & 122.

Supoſé premiérement que les angles *a*, *A* ſoient égaux, les cotés *ad*, *AD* hypotenuſes des tr: rect: *afd*, *AFD* ſeront égaux*. Ainſi on aura l'angle *a*=l'angle *A*; *ab*=*AB*; *ad*=*AD*. *fig.* 119. & 120. *119.

D'ou

D'ou l'on conclura que le Paral: *abcd* est entié-
*131. rement égal au Paral: *ABCD*.*

fig. 121. & 122. Suposé en second lieu, que les angles *a*, *A* soient inégaux, & que le premier *a*, par ex:, soit moindre que le second *A*; on menera du point *A* la ligne *Am* qui fasse avec *AB* l'angle *mAB* égal à l'angle *a*, & qui rencontre en *m* le prolongement de la ligne *DC*. On menera encore par le point *B* la parallele *Bn* à cette ligne *Am* & on aura le Paral: *ABnm*, dont la ligne *DF* sera la hauteur par raport au coté *AB* pris pour baze.

Cela posé, puisque l'angle *dab* du Paral: *abcd* est égal à l'angle *mAB* du Paral: *ABnm*; que la baze *ab* est égale à la baze *AB*; & que la hauteur *df* est égale à la hauteur *DF*, le Paral: *abcd* est entiérement égal au Paral: *ABnm*, suivant ce qu'on a vû dans le premier cas. Or le Paral: *ABnm* est égal en surface au Paral: *ABCD*, comme je le vais prouver; Ainsi le Paral: *abcd* est égal en surface au Paral: *ABCD*.

Je dis que le Paral: *ABnm* est égal en surface au Paral: *ABCD*; & en voici la raison. 1°. Les trois cotés du tr: *DAm*, pris un à un, sont égaux aux trois cotés du tr: *CBn*. Car *DA*=*CB*,
*126. & *Am*=*Bn* *: Et puisque les lignes *DC*, *mn*
126. sont égales chacune à AB, par conséquent qu'elles sont égales entr'elles, il s'ensuit que *DC*+*Cm*, c'est à dire *Dm* est égale à *Cm*+*mn*,
*43. c'est à dire à *Cn*. Ainsi le tr: *DAm*=tr: *CBn**. 2°. Or si l'on retranche de part & d'autre, le petit tr: *Cgm*, il en résulte que le quadrilatére *AgCD*=quadril: *gBnm*. Et si l'on ajoute de part & d'autre le tr: *ABg*, on a enfin que le Paral: *ABCD*=Paral: *ABnm*.

Lem-

Lemme.

Suposé que dans un Rectangle ABCD, *on mêne une ou plusieurs lignes* ei, ko, *fig:123, ou* ei,ko,pq, rs, tu, *fig:124, qui soient paralleles à l'un* AB *de ses cotés ; ou dont les unes* ei, ko *soient paralleles à l'un* AB *de deux de ses cotés* AB, AD *qui forment un de ses angles, & les autres* pq, rs, tu, *à l'autre* AD. *Cela posé, tous les quadrilatéres que ces lignes formeront entr'elles, & avec les cotés du Rectangle* ABCD, *seront pareillement des Parallelogr: rect-angles.* 140. fig.123. & 124.

Premiérement, les lignes *DC, ei, ko,* étant paralleles à *AB*, le sont l'une à l'autre*; De même les lignes *pq, rs, tu, CB* étant paralleles à *AD*, le sont aussi l'une à l'autre : Donc les Quadrilatéres dont il s'agit, sont des Parallelogrammes. En second lieu, l'un des angles de chacun de ces Parallelogr:, par ex: l'angle *ghn* du Paral:*mnhg*, est droit: Car le quadril: *Auhe* étant un Parallelogr:, comme on vient de le voir, & son angle *A*, qui est l'un des angles du Rectangle *ABCD*, étant droit*, il s'ensuit que l'angle oposé *ghn* est aussi droit*. Donc tous les Parallelogrammes dont il s'agit, sont rectangles. *94. *133. *130.

Définition.

Le quarré *EFGH* de la ligne *EF* prise pour l'unité des lignes, est *l'unité des surfaces.* 141. fig,125.

Theorême.

Le produit de la baze AB *d'un Parallel:* ABCD, 142.

 mul-

f:124. & *multipliée par la hauteur* DA, *fig:*124, *ou* DP, *fig.*
126. 126; *exprime la surface de ce Parallelogramme.*

Suposé, par ex:, que la baze *AB* contienne 4 fois l'unité *EF*, & que la hauteur *DA*, ou *DP*, la contienne 3 fois, je dis que le produit 3⋊4, 1 :: *ABCD*, *EFGH*; c'est à dire à dire que le Rectangle *ABCD* contient 3 ⋊4 fois le quarré *EFGH.*

f:124. Si le Parallelogr: *ABCD* est rectangle, on concevra la baze *AB* divisée en quatre parties *Aq*, *qs*, *su*, *uB* égales entr'elles ; & la hauteur *DA* en trois *Ak*, *ke*, *eD* : Ainsi toutes ces parties seront égales chacune à la ligne *EF*. On imaginera encore les droites *qp*, *sr*, *ut* menées des points *q*, *s*, *u* parallelement à *AD* ; & les droites *ko*, *ei*, menées des points *k*, *e*, parallelement à *AB*. Cela posé, le Rectangle *ABCD* sera évidemment divisé en 3 ⋊ 4 quadrilateres, sc: *Aqlk*, *qsml* &c. Ainsi pour demontrer que ce rectangle contient 3 ⋊ 4 fois le quarré *EFGH*, il n'y a qu'a faire voir que chacun de ces quadril: par ex: *mnhg* est une quarré égal au quarré *EFGH* ; & c'est ce que je vais faire.

Premiérement, le quadril: *mnhg* est un pa-
*140. rallelogr: rectangle *, par consequent l'angle
*126. *gmn* est droit. De plus, puisque *mn* = *su* *, & que *su* = *EF*, comme on vient de le voir, il s'ensuit que *mn* = *EF* : Pareillement, puis-
*126. que *mg* = *ke*, * & que *ke* = *EF*, il s'ensuit que *mg* = *EF*; par consequent que *mg* = *mn*. Ainsi le parall: rect: *mnhg* est un quarré. En second lieu, puisque le coté *mn* du quarré *mnhg* est égal au coté *EF* du quarré *EFGH*,
*137. il s'ensuit que ces deux quarrés sont égaux *.

Si

Si le Parall: *ABCD* eſt incliné, on imagi- *fig:* 126.
nera un Paral: rectangle *ABCD*, *fig:* 124. dont la baze *AB* ſoit égale à ſa baze *AB*, & la hauteur *DA* à ſa hauteur *DP*. Après quoi on verra que ces deux parallelogr: étant égaux en ſurface *, & le produit de la baze *AB* du *139.
rectangle, multipliée par ſa hauteur *DA*, éxprimant ſa ſurface, comme on vient de le prouver, il en reſulte que le produit de la baze *AB* du Parallelogr: incliné, multipliée par ſa hauteur *DP*, produit qui eſt le même que le precedent, éxprime la ſurface de ce dernier Parallelogramme.

Définition.

Si de la pointe *C* de l'un des angles d'un tr: *f:*127.
ABC on mene au coté *AB* opoſé à cet angle, une perp: *CF*, cette perp: *CF* ſera la *hauteur* du triangle, & ce coté opoſé *AB* en ſera la *Baze*.

Theorême.

La moitié du produit de la baze ab *d'un tr:* abc, 143.
multipliée par la hauteur cf, *éxprime la ſurface de* *f:*128.
ce triangle abc.

Menez du point *a* la parallele *ad* à *bc*, & du point *c* la parallele *cd* à *ba*.

Le produit de *ab* multipliée par *cf* éxprime
la ſurface du Parallelogr: *abcd* *. Or le tr: *abc* *142.
eſt la moitié du Parallelogr: *abcd* *. Donc la *125.
moitié du produit de *ab* multipliée par *cf* exprime la ſurface de ce tr: *abc*.

Corollaires.

144. *Supoſé que les bazes* ab, AB, *& les hauteurs*
fig: 128. cf, CF *d'un tr:* abc, *& d'un Parallelogr:* ABCD
& 129. *ſoient égales, le tr:* abc *eſt la moitié du Parallelogr:* ABCD.

Car nommant *ab*, ou *AB*, *m*; *cf*, ou *CF*, *n* on aura $\frac{1}{2}$ *mn* pour l'expreſſion de la ſurface du tr: *abc*; & *mn* pour l'expreſſion de la ſurface du Paral: *ABCD*.

145. *Lorſque les bazes* ab. AB, *& les hauteurs* cf,
f: 130. & CF *de deux tr:* abc, ABC *ſont égales, ces tr: ſont*
131. *égaux en ſurface.*

C'eſt une ſuite de ce que nommant encore *ab* ou *AB*, *m*; *cf* ou *CF*, *n*, on aura $\frac{1}{2}$ *mn* pour l'expreſſion de la ſurface de chacun de ces triangles.

Theorême.

146. *Le quarré* ACDE *de l'hypotenuſe* AC *d'un tr:*
f: 132. *rectangle* ABC, *eſt égal à la ſomme des quarres* CIHB,
AFGB *des deux autres cotés* BC, AB.

Il faut dabord remarquer que tous les cotés
136. de chacun de ces quarrés ſont égaux entr'eux
130. & que tous leurs angles ſont droits*. Que les angles *ABC*, *CBH* étant droits, les lignes *AB*, *BH* ne font qu'une même ligne droite.
*59. *AH**, qui eſt parallele à *CI*, parce que le quarré *BHIC* étant un Paral:, *BH* eſt parallele à *CI*. Et que par une raiſon toute ſemblable, les lignes *CB*, *BG* ne font qu'une même ligne droite *CG* parallele à *AF*. Cela

Cela posé, puisque les angles *BAC*, *BCA* du tr: *ABC* rectangle en *B*, sont aigus *, si on mene du point *B* une perp: *BKL* à l'hypotenuse *AC*, comme je supose qu'on le fasse, cette perp: tombera dans ces deux angles *; Et puisque les angles *BKA*, *BKC* seront droits de même que leurs alternes *KAE*, *KCD*, elle sera parallele aux cotés *AE*, *CD*, du quarré *ACDE* *. Ainsi elle divisera ce quarré en deux Parallelogr: *CDLK*, *AELK*, qui seront égaux, comme on le va voir, aux quarrés *CIHB*, *AFGB*, d'ou l'on conclura, conformement au Theorême, que le quarré *ACDE* est égal à la somme des quarrés *CIHB*, *AFGB*.

*114. *76. *92.

Pour démontrer que le Parallelogr: *CDLK* est égal au quarré *CIHB*, on mênera les droites *BD*, *AI*. Ensuite on considerera 1°. que *BL* étant parallele à *CD*, si on prend *CD* pour la baze du tr: *BCD*, & du Parallelogr: *CDLK*, *DL* sera la hauteur de l'un & de l'autre ; & qu'ainsi le tr: *BCD* est la moitié du Parallelogr: *CDLK* *; Que par la même raison, le tr: *ACI* est la moitié du quarré *CIHB*. 2°. Que les cotés *BC*, *CD* du tr: *BCD* sont égaux aux cotés *IC*, *CA* du tr: *ICA* * ; & que l'angle *BCD* du premier triangle, est égal à l'angle *ICA* du second, parce que chacun de ces angles est composé d'un angle droit, & de l'angle aigu *BCA* : Par consequent que le tr: *BCD* est égal au tr: *ICA* *; égalité qui donnera celle du Parallelogr: *CDLK* au quarré *CIHB*.

*144. *136. *41.

On demontrera de la même maniére l'égalité du Paral: *AELK* au quarré *AFGB*.

Défini-

Définition.

147. Par le Rectangle *compris sous* deux lignes *ab*; *ad*, il faut entendre un Rectangle tel que
fig:133. *ABCD* dont les cotés *AB*, *AD* qui forment l'un de ses angles, soient égaux à ces deux lignes.

Theorême.

148. *Soit un tr:* ABC *obtusangles en* B, *& une perp:*
f:133. CD *menée de la pointe* C *de l'un des angles aigus de*
*77. *ce tr: au coté oposé* AB *qu'il faudra prolonger* *. *Cela posé, je dis que le quarré du coté* AC, *oposé a l'angle obtus est égal à la somme des quarrés des deux autres cotés* AB, BC, *& de deux rectangles compris chacun sous le coté* AB *sur lequel la perp: tombe, & son prolongement* BD.

Aiant nommé *AB*, *a*; *BC*, *b*; *CA*, *c*; *BD*, *p*; *CD*, *x*, on exprimera ainsi l'égalité qu'il faut demontrer, . . .

$$cc = aa + bb + 2ap.$$

Le triangle *ADC* rectangle en *C* donnera l'egalité suivante,

146. $cc = aa + 2ap + pp + xx$. Le tr: *CBD* rect: en *D* donnera celle ci . . .

146. $bb - pp = xx$. Or si on met cette valeur de *xx* dans l'équation précedente, on trouvera . . .

$cc = aa + bb + 2ap$, qui est precisement l'équation qu'il falloit démontrer.

Theorê-

Theorême.

Soit un triangle quelconque ABC, *& une perp:* 149.
CD *menée de la pointe* C *de tel de ses angles qu'on* *fig* : 135.
voudra, au coté oposé AB, *coté qui formera au*
moins avec l'un des deux autres un angle aigu B*. *112.
Cela posé, je dis que la somme du quarré du coté AC *oposé à cet angle aigu, & de deux rectangles compris chacun sous le coté* AB *sur lequel la perp: tombe, & la ligne* DB *qui est entre cette perp: & l'angle aigu* B, *est égale à la somme des quarrés des deux autres cotés* AB, BC.

Aiant nommé *AB*, *a* ; *BD*, *p* ; par consequent *AD*, $a-p$; *BC*, *b* ; *CA*, *c* ; *CD*, *x*, on exprimera ainsi l'égalité qu'il faut démontrer, . . .

$cc+2ap=aa+bb$

Le tr: *ADC* rectangle en *D*, donnera . . .

$cc=aa-2ap+pp+xx$*; & le tr: *BDC* rect: en *D*, donnera . . . *146.

$bb-pp=xx$*. Or mettant cette valeur de *xx* à la place de *xx*, dans l'équation précédente, on aura . . . *146.

$cc=aa-2ap+bb$; & ajoutant de part & d'autre $2ap$, il en naitra l'équation suivante qui est celle quil fal: dem:

$cc+2ap=aa+bb$.

SEC-

SECTION II.

Des Cercles.

CHAPITRE I.

Ou l'on rapelle leurs premiéres proprietés établies dans le premier Livre.

Définitions.

fig: 136. Si l'on couche ſur un plan une ligne droite *AB* ; qu'on arrête l'une de ſes extremités en un point fixe *A* de ce plan, en ſorte qu'elle puiſſe tourner librement autour de ce point ; en ſuite qu'on la faſſe tourner juſques à ce qu'elle ſoit revenue à ſa premiere ſituation, elle decrira par ſon autre extremité *B*, une ligne courbe *BCDB* qu'on apelle *Cercle* ou *Circonference de Cercle*, par ce que c'eſt proprement à la ſurface qu'elle termine qu'on donne le nom de *Cercle*.

*f:*136. Le point fixe *A* autour duquel la ligne *AB* qui decrit le cercle ſe meut, porte le nom de *centre* du cercle.

Les lignes droites, telles que *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, menées du centre *A* à la circonference *BCDEB*, s'apellent *Raïons*.

*f:*136. Les portions de la circonference, comme *BC*, *BCD*, ſont des *Arcs*.

Les

Les lignes droites telles que *BC*, *BD*, qui vont d'un point de la circonférence à l'autre, portent le nom de *Cordes* du cercle, ou plus proprement des arcs *BC*, *BCD* dont elles joignent les extremités *B*, *C* ou *B*, *D*. *fig.* 136.

Les cordes, comme *BD*, *CE*, qui passent par le centre *A* sont nommées *Diametres*. *fig.* 136.

Corollaires.

Tous les Raïons d'un Cercle sont égaux. *fig.* 136.

Tous les Diametres d'un Cercle sont égaux chacun à deux Raïons du même cercle ; & par conséquent ils sont égaux entr'eux. *fig.* 136.

Entre les points B, B, B, *du plan sur lequel un cercle est décrit*, 1°. *Ceux qui sont éloignés du centre de la longueur du raïon, sont sur la circonférence ;* 2°. *ceux qui en sont moins éloignés, sont dans le cercle;* 3°. *ceux qui en sont plus éloignés, sont hors du cercle.* *fig.* 137.

Le Diametre BAD *d'un cercle divise sa circonférence, & sa surface en deux parties égales*, BED, BCD. *fig.* 138.

Une corde BF *qui ne passe pas par le centre* A, *divise la circonférence, & la surface en deux parties inégales*, BCF, BEF. *fig.* 139.

Une corde BD *qui divise la circonférence ou la surface en deux parties égales*, BCD, BED, *passe par le centre.* *fig.* 140.

Lorsque les raïons ab, AB *de deux cercles* a, A, *sont égaux les circonférences & les surfaces de ces cercles sont pareillement égales.* 150. *f.* 141, & 142.

 Il n'y

Il n'y a pour s'en convaincre qu'a concevoir que l'un des cercles soit mis sur l'autre en sorte que leurs centres conviennent.

Rem: Par des cercles *égaux*, on pourra donc entendre, & en effet on entendra dans la suite, des cercles dont les raïons soient égaux.

Définition.

151. f.143, & 144. Les arcs du même cercle, ou de diférens cercles, qui sont chacun, ou égaux à la moitié des circonférences de leurs cercles, ou moindres, ou plus grands, seront nommés dans la suite arcs *de même espéce.* Tels sont, par exemple les arcs *bcd, BCD; bdf, BDF; bfd, BFD.*

Theorême.

152. f.143. & 144. *Dans le même cercle, & dans les Cercles égaux* a, A, *les cordes* bd, BD *des arcs égaux* bcd, BCD, ou bfd, BFD *sont égales.*

150. Puisque les circonférences de ces deux cercles sont égales, il est évident qu'il faut que les arcs *bcd, BCD,* ou *bfd, BFD* qu'on supose égaux soient de même espéce. Cela pose,

Premiérement, si ces arcs étoient les moitiés des circonférences de leurs cercles, les cordes
*31. *bd, BD* passeroient par les centres *a, A*;* & par
27. conséquent seroient doubles des raïons. Or les raïons sont suposés égaux; Donc ces cordes seroient égales.

Suposé en second lieu, que les arcs *bcd, BCD* soient

ſoient moindres que les moitiés des circonf: de leurs cercles, on menera les raïons *ab*, *ad*, *AB*, *AD*, qui formeront avec les cordes *bd*, *BD*, les tr: *abd*, *ABD* que l'on comparera de cette maniére.

Puiſque les raïons des cercles *a*, *A* ſont égaux, *ab*==*AB*, & *ad*==*AD*; & puiſque l'arc *bcd*== l'arc *BCD*, l'angle *a*==l'angle *A**: D'ou l'on verra que ces deux triangles ſont entiérement égaux*, & que *bd*==*BD*. *33. *41.

Supoſé en troiſiéme lieu, que les arcs *bfd*, *BFD* ſoient plus grands que les moitiés des circonférences de leurs cercles, on aura, que les arcs *bcd*, *BCD* égaux, à cauſe de l'égalité des circonf:, & de celle des arcs *bfd*, *BFD*, ſeront au contraire moindres que les moitiés des mémes circonférences; par conſéquent que *bd*==*BD*, par le ſecond cas.

Theorême.

153. fig. 143, & 144.

Dans le même cercle, & dans les cercles égaux, les arcs de même eſpéce bcd, BCD *qui ont des cordes égales* bd BD, *ſont égaux.*

Premiérement, ſi les arcs *bcd*, *BCD* étoient les moitiés des circonf: de leurs cercles, les cordes *bd*, *BD* paſſeroient par les centres *a*, *A*, & par conſéquent ſeroient égales, comme on l'a vû dans le Theorême precédent.

Supoſé en ſecond lieu, que les arcs *bcd*, *BCD* ſoient moindres que les moitiés des circonf: de leurs cercles, on ménera encore les raïons *ab*, *ad*, *AB*, *AD* que l'on comparera de cette maniére. L'égalité des raïons des cercles *a*, *A*

donne celles ci, *ab*=*AB*, *ad*=*AD*; & la ſupoſition fournit cette autre, *bd*=*BD*: Donc
*43. les tr: *abd*, *ABD* ſont entiérement égaux*, & l'angle *bad*=l'angle *BAD*, par conſéquent
*33. *bcd*=*BCD**,

Theorême.

154. fig. 145. *Tout point moïen* F *d'une corde* BD *eſt dans le cercle* BCDB, *& tout point* G *du prolongement* BG *eſt hors du cercle.*

La ligne *GD*, & le cercle *BCDB* ſe rencontrent en deux points *B*, *D*; donc tout point
*74. moïen *F** &c.

Corollaires.

155. fig. 145. *Trois points quelconques* B, C, D *de la circonfer: d'un cercle, ne peuvent jamais être en ligne droite.*

Theorême.

156. fig. 146. *La ligne droite* AF *qui paſſe par le centre* A, *& par le milieu* F *d'une corde* BD *qu'on ſupoſe qui ne paſſe pas par le centre* A, *eſt perp: à cette corde* BD.

Menez le raïons *AB*, *AD*. La ligne *AF* eſt un coté commun aux tr: *AFB*, *AFD*; *FB*=*FD*,
*26. par la ſupoſition; *AB*=*AD**: Donc ces deux triangles ſont entiérement égaux, & l'angle
*43. *AFB*=*AFD**; par conſéquent *AF* eſt perp:
*62. à *BD**.

Co-

Corollaires.

La perp: menée du centre A *à une corde* BD *la rencontre en son milieu F.* 157. *fig.* 147.

Car la droite menée du centre *A* au point *F* eſt perp: a la corde *BD* comme on vient de de le voir ; & on ne peut mener du point *A* qu'une perp: à cette corde *BD**. *65.

Supoſé que la corde *BD* paſſe par le centre *A*, la Propoſition eſt claire par elle même ; puiſqu'alors les points *A, F* ſe confondent.

La perp:menée du milieu F *d'une corde* BD,*à cette corde BD , paſſe par le centre* A. 158. *fig.* 147.

C'eſt une ſuite de ce que la droite menée du point *F*, au point *A*, eſt perp: à *BD*, comme on l'a vû ; & de ce qu'on ne peut mener du point *F*, qu'une perp: à *BD**. *63.

Dans le cas ou la corde *BD* paſſe par le centre *A*, la Propoſition eſt encore claire par elle même ; puis qu'alors les points *A*, *F* ſont un même point.

Problême.

Diviſer en deux parties égales un arc donné BCD. 159. *fig.* 148.

On menera la corde *BD*,& la droite *GC* qui la coupe perpendiculairement par le milieu *F**. *72. Cette perp: *GC* qui paſſera par le centre *A**, *158. diviſera l'arc *BCD* en deux parties égales *BC*, *CD*, comme on s'en convaincra aiſément ſi on

on supose que le demi cercle *GBC* soit reploié le long de *GC* sur le demic: *GDC.*

Lemme.

160. *Les perp: indéfinies* BF, DG *à deux lignes droites* BC, CD *qui font un angle* BCD, *se coupent.*

*fig.*149, 150. & 151. Si l'angle *BCD* est droit, l'angle *BCD*, & l'angle *CDG*, pris ensemble sont égaux à deux
*fig.*149. droits; ainsi *CB* est parallele à *DG**; par con-
*92, séquent la droite *BF* perp: à cette parallele *CB*,
*96. rencontre l'autre *DG**.

*f.*150.& & 151. Si l'angle *BCD* est plus grand ou moindre qu'un droit, on menera par la point *C* à la perp: *DG* la parallele indéfinie *CH*, qui for-
*90. mera avec *DC* l'angle droit *DCH**, & par conséquent avec *CB* l'angle aigu *HCB*. Cela posé, *BF* qui fait avec *BC* l'angle droit *FBC*,
*97. coupe *CH**, & par conséquent *DG**, à laquelle
*95. *CH* est suposée parallele.

Problême.

161. *Trois points* B, C, D *de la circonférence d'un cercle*
*fig.*152. *étant donnés, trouver le centre de ce cercle.*

Menez d'abord les droites *BC*, *CD* qui for-
*155. meront un angle *BCD**. Menez ensuite les droites *FA*, *GA* qui coupent perpendiculairement celles là *BC*, *CD* par le milieu aux points
*72. *F*, *G**, & qui se couperont elles mêmes en
*160. un point *A**, qui sera le centre du Cercle *BCD*.

Les perp: indef: *FA*, *GA* passent chacune
*158. par le centre du cercle *BCD**; donc ce centre est

un point commun à ces deux perp:. Or puisqu'elles se coupent en *A*, & que par conséquent le point *A* est le seul point qui leur soit commun, il s'ensuit que ce point *A* est le centre du cercle *BCD*.

Problême.

Décrire un cercle qui passe par trois points donnés B, C, D *lesquels ne soient pas en ligne droite.* 162. fig. 153.

1ò. On trouvera come auparavant le point *A* qui sera également éloigné des points *B, C**, *66. de même que des points *C, D*, & par conséquent des trois points *B, C, D*. 2ò. De ce point *A*, & avec les raïons *A, B*, ou *AC*, ou *AD* on décrira le cercle *BCD* qui passera donc par les trois points *B, C, D*.

Corollaire.

On peut toujours faire passer un Cercle, & on n'en peut faire passer qu'un seul, par trois points donnés qui ne soient pas en ligne droite. 163. fig. 153.

La premiere partie de cette Proposition est une suite évidente de ce qu'on peut toujours résoudre le Problême précédent.

La seconde partie, c'est à dire qu'il ne peut y avoir qu'un seul Cercle qui passe par les points *B, C, D*, découle de ce que le centre de tout Cercle qui passe par ces trois points, doit être un point commun aux perp: *FA, GA*,*& *
de ce qu'elles n'en ont qu'un seul, savoir celui où elles se coupent.

Theo-

Theorême.

164. *Le Diametre* BC *d'un cercle* BDC *est plus grand*
fig. 154. *que toute autre corde* BD *qui ne passe pas par le centre* A.

Si on mene du centre *A* le raïon *AD*, on verra d'abord que *BA+AD* étant plus grande que *BD*, il s'ensuit que *BA+AC*, ou *BC*, est plus grande que *BD*.

Theorême.

165. *Dans le même cercle, & dans les cercles égaux,*
fig. 155. 1°. *Les cordes égales* bd, BD *sont également éloignées du centre* A; 2°. *les cordes* bd, BD *également éloignées du centre* A *sont égales.*

Suposé 1°. que les cordes *bd*, *BD* soient égales, je dis donc que les perp: *Af*, *AF* menées du centre *A* à ces cordes sont aussi égales. Menez les raïons *ab*, *AB*.

Les cotés *bf*, *BF* des tr: *Afb*, *AFB* rectangles aux points *f*, *F*, sont égaux puis qu'ils sont les
*157. moitiés des cordes * *bd*, *BD* qu'on supose éga-
*26. les ; les hypotenuses *Ab*, *AB* sont égales *; Donc leurs troisiémes cotés *Af*, *AF* sont aussi
*120. égaux *.

Suposé en second lieu que les perp: *Af*, *AF* soient égales, je dis que les cordes *bd*, *BD* sont aussi égales. Menez encore les raïons *ab*, *AB*.

Les cotés *Af*, *AF* des tr: *Afb*, *AFB* rectangles aux points *f*, *F*, sont égaux par la suposition, les hypo-

hypotenuses *Ab, AB,* sont égales ; Donc leurs troisiémes cotés *bf, BF* sont aussi égaux*. Or *120.
ces troisiémes cotés *bf, BF* sont les moitiés des cordes *bd, BD**; donc ces cordes sont égales. *158.

CHAPITRE III.

Des Angles qui ont leurs pointes au centre ou sur la circonférences.

Définitions.

LA partie *BFD B* de la surface d'un cercle, 166.
terminée par un arc *BFD*, & par sa corde
BD, s'apelle un *Segment* de ce cercle. *fig.* 156.

Un angle *BAD* qui a sa pointe au centre *A* 167.
d'un cercle, se nomme un angle *du centre*; &
l'arc *BCD* sur lequel il s'apuie, s'apelle la *Baze* *fig.* 156.
de cet angle.

Un angle *BFD*, qui a sa pointe *F* sur la cir- 168.
conf: d'un cercle, & dont les jambes vont la
rencontrer en deux autres points *B, D*, est un *fig.* 156.
angle *dans la circonference*; & l'arc BCD sur lequel il s'apuie est la *baze* de cet angle.

Un angle *BFD* qui a sa pointe *F* sur l'arc *BFD* 169.
d'un segment *BFDB*, & dont les jambes *FB, FD*
passent par les extremités *B, D* de cet arc, est *fig.* 156.
dit *dans ce segment* BFDB.

Theorême

Tout angle BFD dans la circonférence a pour sa me- 170.
sure la moitié de l'arc BD sur lequel il s'apuie. *fig.* 157.
Supose 1°. que le centre *A* soit sur l'une des 158. &
 deux 159.

deux lignes *FB*, *FD*, par ex: , ſur *FD*, on menera le raïons *AB*. Puiſque les cotés *AF*,*AB* du
*107. tr: *AFB* ſont égaux , l'angle *F*=l'angle *B**.
Or l'angle *F*+ l'angle *B*= l'angle extérieur
*113. *BAD**; donc l'angle *F*= la moitié de l'angle
BAD. Mais l'angle *BAD* a pour ſa meſure
*33. l'arc *BD** ; donc l'angle *F* a pour la ſienne la moitié de cet arc *BD*,

*fig.*158. Supoſé 2°. que le centre *A* ſoit entre les deux lignes *FB*, *FD* , on menera du point *F* parce point *A* la ligne *FAC*. Suivant le cas précédent , les Angles *BFC* , *CFD* ont pour leurs meſures la moitié des arcs *BC* , *CD* ; donc la ſomme de ces angles, c'eſt à dire l'angle *BFD*, a pour ſa meſure la moltié de la ſomme de ces arcs, ſavoir la moitié de l'arc *BD*.

*fig.*159. Supoſé 3°. que le centre *A* ſoit hors de chacune des lignes *FB*,*FD*, & de l'eſpace qu'elles renferment , on menera encore du point *F* par ce point *A* la droite *FAC*. Par le premier cas , les angles *CFD* , *CFB* ont pour leurs meſures la moitié des arcs *CD* , *CB*; donc la diférence de ces angles , ſavoir l'angle *BFD* , a pour ſa meſure la moitié de la diférence de ces arcs c'eſt à dire la moitié de l'arc *BD*.

Corollaires.

171. *Les Angles* BFD, BGD *qui ſont dans le même ſegment* BFDB, *ou, ce qui revient à la même choſe, les*
*fig.*160. *angles* BFD, BGD *dans la circonfér: , qui s'apuient ſur le même arc* BCD , *ſont égaux*.

172. *L'angle* BFD , *qui eſt dans le demi cercle* BFDB
*f.*161. *eſt droit ; L'angle* BFG *qui eſt dans un plus grand ſeg-*

ſegment BFGB *eſt aigu. Et l'Angle* BFH *qui eſt dans un moindre ſegment* BFHB *eſt obtus.*

Theorême.

Décrire ſur une ligne donnée BD *un ſegment* BCD *tel que l'angle* C *dans ce ſegment ſoit égal à un angle donné* c 173. *fig.*162. & 163.

De la pointe *c* de l'angle donne, prenez ſur ſes jambes deux parties égales *cb,cd,* & menez la droite *bd.* 2ò. Des points *B, D* menez les droites indéfinies *BC, DC* qui faſſent avec la droite *BD* les angles *B, D* égaux aux angles *b, d,* & par conſéquent moindres,pris enſemble, que deux droits; d'ou il ſuit que ces deux lignes *BC, DC* ſe rencontreront en un point *C**, & qu'elles y formeront un angle *C* *97.
égal à l'angle donné *c**. 3ò. Décrivez l'arc de *116.
cercle *BCD* qui paſſe par les trois points *B,C,D**, & vous aurez le ſegment *BCDB* qu'il *162.
falloit décrire.

CHAPITRE IV.

Des Tangentes.

Définition.

LOrs qu'une ligne droite *ECH* rencontre la 174.
circonf: *BCDB* d'un cercle, en ſorte que *fig.*164.
ſi on la prolonge de part & d'autre du point de rencontre *C,* elle n'entre point dans le cercle, on dit qu'elle le *touche*, ou qu'elle eſt ſa *Tangente* en ce point *C.*

Problême.

175. *Par un point donné* C *sur la circonf: d'un cercle*
fig. 165. BCDB, *mener une ligne droite* ECH *qui le touche en ce point.*

Du centre *A* menez au point *C* le raïon *AC*, & du point *C* menez au raïon *AC* la perp: *ECH* qui touchera le cercle au point *C*.

Premiérement, la droite *ECH* rencontre le cercle *BCDB* au point *C*. 2ò. Bien loin d'entrer dans le cercle, tout point *E* de cette ligne *ECH*, diférent du point *C*, est hors du cercle : Car *AC* étant perp: à *ECH*, il s'ensuit
*68. que *AE*>*AC**; par conséquent que le point *E* est hors du cercle *BCDB*.

Corollaire.

176. *La perp:* ECH *menée à un raïon* AC *par son*
fig. 165. *extrémité* C, *touche donc le cercle en ce point* C, *& ne le rencontre en aucun autre.*

Theorême.

177. *L'oblique* ECH *menée à un raïon* AC *par son ex-*
fig. 166. *tremité* C, *entre dans le cercle* BCDB.

Puisque *ECH* est oblique à *AC*, l'un des deux angles *ACE*, *ACH*, sc: *ACE*, est aigu; donc si du point *A* on mene à la droite *EH* une
*76. perp: *EP* elle tombera dans l'angle *ACE**. Et
*68. comme elle sera moindre que le raïon *AC**,
il s'ensuit que le point *P* ou elle rencontrera
*28. la droite *ECH* est dans le cercle *BCDB**; par con-

conséquent que la droite *ECH* entre dans le cercle *BCDB*.

Corollaires.

Si une ligne droite ECH *touche un cercle* BCDB *en un point* C, *elle est perp: au raïon* AC *qui aboutit en ce point* C. 178. fig. 167.

Car si elle lui étoit oblique, elle entreroit dans le cercle *BCDB*, comme on vient de le voir, & par conséquent ne le toucheroit pas.

Une ligne droite ECH *qui touche un cercle* BCDB *en un point* C *ne le rencontre qu'en ce seul point.* 179. fig. 167.

Puisque *ECH* touche le cercle *BCDB* au point *C*, elle est perp: au raïon *AC**; donc elle ne rencontre le Cercle qu'en ce seul point *C**. *178. *176.

Par un même point C *de la circonf: d'un cercle* BCDB *on ne peut mener qu'une tangente* ECH *à ce cercle* BCDB. 180. fig. 167.

On ne peut mener du point *A* au point *C* qu'un raïon *AC*; & du point *C* on ne peut mener au raïon *AC* qu'une perp: *ECH**. Or la tangente au point *C* doit être perp: au raïon *AC* qui aboutit en ce point; donc par un même point *C* &c. *63.

Problême.

D'un point E *donné hors d'un cercle* BCDB, *mener du coté qu'on voudra, par raport a la droite* ED *qui passe par ce point* E *& par le centre* A, *par exemple du coté de* C, *une tangente* EC *à ce cercle* BCDB. 181. fig. 168.

1°. Di-

1ò. Diviſez la droite *EA* au point *G*, en deux parties égales *GE*, *GA*. 2ò. Du point *G*, & avec le raïon *GE*, ou *GA*, décrivez du coté de *C* le demi cercle *ECA* qui ſera en partie dedans le demi cercle *D*, & en partie dehors,& qui par conſéquent le coupera en un point *C*
*48. hors de la ligne *ED**. 3ò. Du point *E* menez au point *C* la droite *EC* qui touchera le cercle *BCDB* au point *C*. Aiant mené le raïon *AC* on connoitra que puiſque le ſegment *ECA*
*172. eſt un demi cercle,l'angle *ECA* eſt droit*; d'où l'on conclura que *EC* touche le cercle *BCDB*
*176. au point *C**.

Theorême.

182. *Si d'un même point* C *de la circonf: d'un cercle* BCDB
fig. 169, 170. & 171. *on mene une tangente* CE, *& une corde* CB, *elles formeront un angle* ECB *qui aura pour ſa meſure la moitié de l'arc* CGB *compris entre ces deux lignes.*

fig. 169. Supoſé, premiérement, que la corde *CB*
*178. paſſe par le centre *A*, l'angle *ECB* ſera droit*, c'eſt à dire qu'il aura pour ſa meſure la moitié d'une circonférence de cercle. Or l'arc *CGB*
29. ſera la moitié de la circonférence du ſien; donc l'angle *ECB* aura pour ſa meſure la moitié de l'arc *CGB*.

fig. 170. Supoſé, en ſecond lieu, que la corde *CB* ne paſſent pas par le centre *A*, on menera du point *C* par le centre *A* la droite *CD* qui fera
*178. avec *CE* l'angle droit *ECD**. Cela poſé, ſi l'angle *ECB* eſt aigu, on verra que l'angle *ECD* ayant pour ſa meſure la moitié de l'arc *CBD*, ſuivant le cas précédent, & que l'angle *BCD*

ayant pour la ſienne la moitié de l'arc *BD**, il s'en ſuit que la diférence de ces deux angles, ſavoir l'angle *ECB* a pour ſa meſure la moitié de la diférence de ces deux arcs, c'eſt à dire la moitié de l'arc *CGB*. * 170.

Si l'angle *ECB* eſt obtus, on verra pareillement que les Angles *ECD*, *DCB* ayant pour leurs meſures les moitiés des arcs *CGD*, *DB*, il s'enſuit que l'angle *ECB* qui eſt leur ſomme, a pour ſa meſure la moitié de la ſomme de ces arcs, c'eſt à dire la moitié de l'arc *CGB*. fig. 171.

CHAPITRE V.

Des Cercles qui ſe coupent, ou qui ſe touchent.

Définition.

LEs cercles décrits du même centre ſont dits *concentriques* ; & ceux qui ſont décrits de diférens centres, *excentriques*. 183.

Theorême.

Les cercles BCDEB, MCNEM qui ſe coupent ſont excentriques. 184. fig. 172.

Car s'ils étoient concentriques, comme le raïon de l'un ſeroit néceſſairement, ou égal au raïon de l'autre, ou moindre, ou plus grand; tous les points de ſa circonférence tomberoient ou ſur celle de l'autre, ou dedans ce cer-

28. cercle, ou dehors. Or dans tous ces cas, les cercles ne se couperoient point, comme on supose qu'ils le font. Donc il est impossible qu'ils soient concentriques, par conséquent ils sont excentriques.

Theorême.

185. fig.173. *Lorsque deux cercles BCDEB, MCNEM, se coupent, 1ò. ils se coupent en deux points C, E; 2ò. Ils ne se rencontrent en aucun autre; 3ò. Ces deux points C, E sont de part & d'autre de la droite qui passe par les centres.*

Premiérement, il est deja bien clair, puisqu'ils se coupent, qu'ils se coupent au moins en deux points *C, E*. 2ò. Je dis qu'ils ne se rencontrent en aucun autre point. Car s'ils se rencontroient encore en un troisiéme point,
163. ils ne seroient pas diférens l'un de l'autre; & par conséquent ne se couperoient pas. 3ò. J'ajoute que les deux points *C, E* ou ils se coupent, sont situés de part & d'autre de la droite qui passe par leurs centres. Il n'y a pour s'en convaincre qu'a mener la droite *CE* qui sera une corde commune aux deux cercles, & par le milieu de cette corde, la droite indéfinie *DN* qui lui soit perpendiculaire. On verra d'abord que la ligne *DN* devant passer par
158. les centres des deux cercles, il s'ensuit que les deux points *C, E*, sont de part & d'autre &c.

Définition.

186. Lorsque deux cercles excentriques *BCDEB, MNPDM*, se rencontrent en un point *D* de ma-

maniére qu'ils ne se coupent pas, on dit qu'ils se *touchent* au point *D* ou ils se rencontrent.

Problême.

D'un point O *donné hors d'un cercle* BCDEB, *ou dedans, mais ailleurs qu'au centre* A, *décrire un cercle* MNPDM *qui touche le premier* BCDEB. 187. *fig.* 174. & 175.

Menez par les centres *A*, *O*, la droite *AO* qui coupera la circonf: *BCDEB* en deux points *B*, *D* *, dont l'un, sçavoir *D*, sera le plus proche du point *O*. Ensuite, du point *O*, & avec le raïon *OD*, décrivez le cercle *MNPD*, qui trouchera le premier au point *D*. * 74.

Il est deja clair que le cercle *MNPD* rencontre le cerle *BCDEB* au point *D*. Il est encore évident que suivant que le point *O* est hors du cercle *BCDEB*, ou qu'il est dedans, le point *N* du cercle *MNPD* est pareillement hors de ce cercle ou dedans. J'ajoute, & je vais démontrer qu'il en est de même de tout autre point *M* diferent du point *D*; d'ou l'on conclura que le cercle *MNPD* touche le cercle *BCDEB* au point *D* & qu'il ne le rencontre en aucun autre point.

Soient menées les droites *OM*, *AM*.

Suposé 1ò. que le point *O* soit hors du cercle *BCDEB*, on a $AM + MO > AD + DO$; & en retranchant de part & d'autre les raïons, *MO*, *DO*, il reste $AM > AD$. Donc le point *M* est hors du cercle *BCDEB* *. *fig:* 174. * 28.

Suposé 2ò. que le point *O* soit dans le cercle *BCDEB*, on a, $AM < AO + OM$, & en mettent au lieu de $AO + OM$, $AO + OD$ ou *AD*, *fig:* 175.

AM<*AD*. Donc le point *M* est dans le cer-
*28. cle *BCDEB**.

Corollaire.

189. *Lorsque deux Cercles excentriques* BCDEB, MNPDM *se rencontrent en un point* D *de la droite* AO *qui passe par leurs centres, ils se touchent donc en ce point* D, *& ne se rencontrent en aucun autre.*
fig. 174, & 175.

Theorême.

190. *Lorsque deux cercles* BCDEB, MNPDM *se touchent, ils se touchent en un point* D *de la droite* AO *qui passe par leurs centres* A, O *qu'on supose diférens; & ils ne se rencontrent en aucun autre point.*
fig. 174, & 175.

Premiérement, ils ne peuvent pas se rencontrer, ni par conséquent se toucher, en un point *M* qui soit hors de la droite *AO*. Car s'il se rencontroient en un tel point *M*, on auroit aprés avoir mené les raïons *AM, OM*, *AM*<*AO*
*101. $+$*OM**, & *AM*>$\mp$*AO*$\pm$*OM*, d'ou il suit que les demic: *BCD, DMN*, & par la même les cercles entiers *BCDEB*, *MNPDM*, se coupe-
*103. roient *.

En second lieu, puis donc que ces deux cercles, qu'on supose excentriques, se rencontrent en un point *D* de la droite *AO*, ils se touchent en ce point *D*, & ne se rencon-
*179. trent en aucun autre *.

CHA-

CHAPITRE VI.

Des Cercles considerés par raport à leur surface.

Définition.

LA partie *ABGA* de la surface d'un cercle, terminée par deux raïons *AB*, *AG*, & par l'arc *BG* aux extremités duquel ces deux raïons aboutissent, s'apelle un *Secteur* de ce Cercle ; & cet arc *BG* se nomme la *Baze* du Secteur. 191. fig. 176.

Démande.

La corde BMC *d'un arc infiniment petit* BC *peut être prise pour cet arc* BC. 192. fig. 177.

Corollaire.

La perp: AM *menée du centre* A *à la corde* BMC *d'un arc infiniment petit* BC *peut être considerée comme égale au raïon* AB. 193. fig. 177.

Car le point *M* étant sur la corde *BMC**, peut donc être consideré comme étant sur l'arc *BC*. *157.

Theorême.

La moitié du produit de la Baze BG *d'un Secteur* ABGA, *multipliée par le raïon* AB, *exprime la surface de ce Secteur.* 194. fig. 177.

Ayant ſupoſé que l'arc *BG* ſoit diviſé en un
nombre infini de parties égales *BC, CD, DE,*
&c, on imaginera les raïons *AC, AD, AE;* les
cordes *BMC, CND, DPE*, &c, qui ſeront
*152. égales entr'elles *, & les perp: *AM, AN, AP*,
&c, menées du centre *A* à ces cordes, per-
*165. pendiculaires qui ſeront égales entr'elles *.
Enſuite prenant les cordes *BMC, CND, DPE,*
*192. &c, pour les arcs *BC, CD, DE,* &c*; par con-
ſéquent les triangles *ABMC, ACND, ADPE,*
pour les Secteurs *ABC, ACD, ADE;* & chacu-
ne des perp: *AM, AN, AP* pour le raïon du
*193. cercle *; on nommera chacune de ces cordes
c; leur nombre *n;* & par la même leur ſom-
me, ou l'arc *BG*. *nc;* chacune de ces perpen-
diculaires, ou le raïon *r;* par conſéquent cha-
143, cun de ces triangles, $\frac{1}{2}cr$; D'ou l'on aura que
le Secteur *ABGA* $= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}cr$, &c
$= \frac{1}{2} \times \overline{c+c+c,}$ &c $\times r = \frac{1}{2}ncr$, ce qu'il falloit
démontrer.

Corollaire.

195. *La moitié du produit de la circonf:* BGB *d'un cer-*
fig.177. *cle, multipliée par le raïon* AB, *exprime la ſurface de
ce Cercle.*

SECTION III.

Des Raports Géometriques des lignes & des ſurfaces.

CHA-

CHAPITRE I.

Des Raports Géometriques des Lignes.

Lemme.

Upofé qu'un coté CA *d'un tr:* ABC *soit divisé en plusieurs parties égales* Cd, df, *&c*, *& que des points de division* d,f,g, *on mene à l'un des deux autres cotés, par ex: au coté* AB, *des paralleles* dm, fn, gp, *elles diviseront l'autre coté* CB *dans le même nombre de parties* Cm, mn, *&c; & ces deruières parties* Cm, mn *&c. seront aussi égales entr'elles.* 196. fig. 178.

Il est déja clair que les paralleles *dm, fn, gp*, au coté *AB* diviseront le coté *CB* en autant de parties *Cm, mn*, &c, que l'on en suposera dans la coté *CA*. Il n'y a donc qu'a démontrer que ces parties *Cm, mn*, &c, seront égales entr'elles; & c'est ce que je vais faire en prouvant que chacune de celles qui suivent *Cm*, par ex:, *np*, est égale à *Cm*.

Pour cet effet, je mene du point *C* la perp: *Cr* à *dm*; & des points *f, n*, les perp: *fs, nt* à *gp*. Ensuite, de ce que les lignes *dm, gp* sont paralleles à *AB*, par la sup:, & qu'ainsi elles le sont l'une à l'autre *; j'en conclus d'abord que l'angle *Cdr*═l'angle *fgs*, & que l'angle *Cmr*═ l'angle *npt**. *94. *94.

Cela posé, 1°. les hypotenuses *Cd, fg* des tr: rectangles *Cdr, fgs* étant égales, par la sup:; & les angles *Cdr, fgs* étant égaux, comme on vient de

de le voir, il s'ensuit que ces deux tr: sont en-
*119. tiérement égaux, & que *fs*=*Cr**. Or *nt*=*fs**;
*82. donc *nt*=*Cr*. 2°. Puisque les cotés *Cr*, *nt* des
tr: rectangles *Crm*, *ntp* sont égaux, & que les
angles *Cmr*, *npt* sont aussi égaux, comme on
l'a vû, il s'ensuit encore que ces deux tr: sont
*119. entiérement égaux, & que *np*=*Cm**.

Corollaire.

197. fig. 179. *Si un coté* CA *d'un tr:* ABC *est divisé en plusieurs parties égales* Cd, df, *&c*, *& que des points de division* d, f, g, *on mene des lignes* dm, fn, gp, *qui divisent l'un des deux autres cotés, savoir* CB, *en autant de parties égales, que l'on en supose dans le premier coté* CA; *ces lignes* dm, fn, gp *seront paralleles à l'autre coté* AB.

Suposé que des points *d, f, g*, on mene des paralleles au coté *AB*, elles passeront par les points *m, n, p*, comme on vient de le démontrer. Or les lignes *dm, fn, gp* passent par les points *m, n, p*; d'ou il suit qu'elles sont les mêmes que ces paralleles. Donc les lignes *dm, fn, gp* sont paralleles au coté *AB*.

Theorême.

198. fig. 180. *Si on mene dans un tr:* ABC, *une ou plusieurs lignes*, EN, HQ *paralleles à l'un de ses cotés, savoir au coté* AB, *elles diviseront les deux autres cotés* CA, CB *en un même nombre de parties; & celles de l'un seront proportionnelles à celles de l'autre, c'est à dire que* CE, EH, HA : : CN, NQ, QB.

Il est évident que les lignes *EN*, *HQ* diviseront les cotés *CA, CB* en autant de parties l'un
que

que l'autre, par conſéquent qu'il n'y a qu'a démontrer que *CE, EH, HA* : : *CN, NQ, QB*.

Concevez une partie aliquote comune aux parties *CE, EH, HA* du coté *CA*, qui ſoit contenue, par ex:, autant de fois dans chacune de ces parties que je le ſupoſe dans la figure. Concevez encore que des points *d, f, g*, &c, on mene au coté *AB* les paralleles *dm, fo, gp*, &c, qui avec les deux *EN, HQ* diviſeront le coté *CB* en autant de petites parties *Cm, mN, NO*, &c, égales entr'elles, qu'il y en a dans le coté *CA**; d'ou vous conclurez que *CE, EH, HA* :: *CN, NQ, QB*. *196.

Rem: Il faut ſe reſſouvenir ici que lorſque pluſieurs gr: *CE, EH, HA,* ſont proportionnelles à d'autres *CN, NQ, QB*, chacune des premiéres, par ex:, *CE*, eſt à leur ſomme *CB* des derniéres.

Theorême.

Supoſé qu'on mene dans un tr: ABC *une ou pluſieurs droites* EN, HQ, *qui diviſent deux de ſes cotés, ſavoir* CA, CB *en un même nombre de parties, en ſorte que celles de l'un ſoient propor: à celles de l'autre, c'eſt à dire que* CE, EH, HA : : CN, NQ, QB ; *ces lignes* EN, HQ *ſeront paralleles à l'autre coté* AB. 199. fig. 180.

Premiérement, concevez une partie aliquote commune aux parties *CE*, *EH*, *HA* du coté *CA*. qui ſoit contenue, par ex:, 2 fois dans *CE*, 3 fois dans *EH*, & 4 fois dans *HA*. 2°. Concevez une partie aliquote de *CN*, qui ſoit contenue autant de fois dans *CN* que la précédente l'eſt dans *CE*, c'eſt à dire 2 fois ; partie qui en conſéquence de ce qu'on ſupoſe que

CE,

CE,EH,HA : : *CN*, *NQ*, *QB*, ſera donc contenue 3 fois dans *NQ*, & 4 fois dans *QB*. 3°. Supoſé que des points *d*, *f*, *g*, &c, on mene aux points *m*, *o*, *p*, &c. les droites *dm*, *fo*, *gp*, &c, qui avec les deux *EN*, *HQ* diviſeront donc le cotê *CB* en autant de parties *Cm*, *mN*, *No*, &c, égales entr'elles, qu'il y en a dans le coté *CA*, &
*197. qui par conſéquent ſeront parall: au coté *AB**; d'ou vous conclurez que les droites *EN*, *HQ* ſont donc paralleles à ce coté *AB*.

Définitions.

200. fig. 181, & 182. Lorſque deux figures planes rectilignes *abcde*, *ABCDE* ont autant de cotés l'une que l'autre, & que tous les angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e* de la premiére, pris un à un, ſont égaux aux angles *A*, *B*, *C*, *D*, *E* de la ſeconde, pris dans le même ordre, elles ſont dites *équiangles*; & les cotés, par ex: *ab*, *Ab* qui ſervent à former les angles; égaux *a*, *A*; *b*, *B*, ſont dits *ſemblablement poſés* dans ces deux figures.

201. fig. 183, & 184. Si deux figures planes rectilignes *abcde*, *ABCDE* ſont équiangles, & que les cotés *ab*, *bc*, &c, de la premiére ſoient proportionnels, ou, ce qui revient au même, ayent le même raport, aux cotés ſemblablement poſés *AB*, *BC*, &c, de la ſeconde; ces deux figures ſont dites *ſemblables*.

Theorême.

202. fig. 185, & 186. *Les triangles équiangles* abc, ABC *ſont ſemblables. C'eſt à dire, ſupoſé que les trois angles* a, b, c, *d'un tr:* abc *pris un à un, ſoient égaux aux trois angles* A, B, C *d'un autre tr:* ABC; *les cotés* ab, bc, ca

du

du premier tr: ſont proportionnels aux cotês ſemblabement poſés AB, BC, CA *du ſecond.*

Le tr: *abc* étant mis ſur le tr: *ABC* de maniére que le point *b* ſoit ſur le point *B*, & que le coté *ba* ſoit couché le long du coté *BA*; le coté *bc* ſera couché le long du coté *BC*, parce que l'angle *b* = l'angle *B*, par la ſupoſition. Ainſi le tr: *abc* aura la ſituation *m*B*n*.

Cela poſé, puiſque l'angle *m* = l'angle *A*, il s'enſuit que *nm* eſt parallele à *CA**. Donc *Bm*,*Ba*::*Bn*,*BC**; *92.
ou, ce qui revient au même, *ba*,*BA* :: *Bc*,*BC*; & *alternando ba*,*bc* :: *BA*, *BC*. On prouvera de la même maniére que *bc*,*BC* :: *ca*, *CA*; par conſéquent que *bc*, *ca* :: *BC*, *CA*. *198.

Theorême.

Les trois cotés ab,bc,ca,*d'un tr:* abc *ſont proportionnels aux trois cotés* AB, BC, CA *d'un antre tr:* ABC, *les angles* a,b,c *du premier tr:, pris un à un, ſont égaux aux angles répondans* A, B, C *du ſecond.* 203. *fig.* 185, 186.

☞ Soit priſe des le point *B* ſur le coté *BA* prolongé s'il eſt néceſſaire, la ligne *Bm* égale *ba*, & ſoit menée du point *m* la parall: *mn* au coté *AC*.

Premiérement, l'angle *B* eſt commun aux tr:*m*B*n*, ABC; & puiſque *mn* eſt parallele à AC, l'angle *m* = l'angle A*, & l'angle *n* = l'angle C. Donc, ſupoſé, comme je le vais démontrer, que de même que le coté *ab* du tr: *abc* eſt égal au coté *mB* du tr: *mBn*, *bc* ſoit égal à B*n* & *ca* à *nm*, par conſéquent que les angles *a*, *b*, *c* pris un à un, ſoient égaux aux angles *m*, B, *n**; il s'enſuit que les angles *a*, *b*, *c*, pris un à un, ſont égaux aux angles A, B, C. *89. *43.

En ſecond lieu, je dis donc que *bc* = *Bn*, & que *ca* = *nm*. Puiſque les tr: *mBn*, *ABC* ſont équiangles, come on vient de le voir, il s'enſuit que *mB*,*Bn* :: *AB*, *BC**. Or *ab*,*bc* :: AB, BC par la ſup:; donc *ab*,*bc*::*mB*, *202.

 Bn;

Bn; donc puisque $ab = mB$, $bc = Bn$. On démontrera de la même maniére que $ca = mn$.

Theorême.

204. *Si deux cotés* ab, bc *d'un tr:* abc *sont propor-*
fig. 185, *tionnels à deux cotés* AB, BC *d'un autre tr:* ABC,
186. *& que l'angle* b *forme par les deux premiers cotés* ab, bc *soit égal à l'angle* B *formé par les deux derniers* AB, BC; *les deux autres angles* a, c *du premier tr: pris un à un, sont égaux aux deux autres angles répondans* A, C *du second triangle.*

Concevez que le tr: *abc* soit mis sur le tr: *ABC*, en sorte que le point *b* soit sur le point *B*, & que le coté *ba* soit couché le long du coté *BA*. Puisque l'angle $b =$ l'angle *B*, le coté *bc* se couchera le long du coté *BC*; ainsi le tr: *abc* aura la situation *mBn*.

Cela posé, puisque *Bm*, *Bn* :: BA, BC, par la supposition, il s'ensuit *alternando* que *Bm*, *BA* :: *Bn*, *BC*. & *dividendo*, que Bm, mA :: Bn, nC. Donc *nm* est parallele
*199. à *CA**; par conséquent l'angle *m*, ou $a =$ l'angle *A**,
*89. & l'angle *n*, ou $c =$ l'angle C.

Theorême.

205. *Suposé que l'hypotenuse* ab, *& un autre coté* bc
fig. 185, *d'un tr: rectangle* abc *soient proport: à l'hypot:* AB, *&*
186. *un autre coté* BC *d'un autre tr: rectangle* ABC; *les deux angles aigus* a, b *du premier tr:, pris un à un, sont égaux aux deux angles aigus répondans* A, B *du second triangle.*

le *n* à l'ang
AB, *BC* pa

la construction; donc *bc*=*Bn*. Maintenant, puisque les angles *c*, *n* des tr: *abc*, *mBn* sont droits, que *ab*=*mB*, & que *bc*=*Bn*, il s'ensuit que ces deux tr: sont entiérement égaux*. Donc l'angle *a*= l'angle *m*= l'angle *A*, ainsi l'angle *a*= l'angle *A*; de plus l'angle *b*= l'angle *B*.

Theorême.

Suposé que de la pointe C *de l'un des angles d'un tr:* ABC, *on mene une ligne droite* CD *qui divise cet angle* ACB *en deux parties égales* ACD, DCB; *elle divisera le coté oposé* AB *en deux parties* AD, DB *proportionnelles aux cotés* AC, CB *avec lesquels elles concurront.* 206. fig. 187.

Prolongez *AC* par son extremité *C* jusques à ce que le prolongement *CE* soit égal à *CB*; & menez la droite *BE*.

Puisque les cotés *CE*, *CB* du tr: *CBE* sont égaux, les angles *CBE*, *CEB* oposés à ces cotés, sont aussi égaux*. Or l'angle extérieur *ACB*= *107.
l'angle *CBE* + l'angle *CEB**; Donc la moitié *113.
de l'angle *ACB*, c'est à dire l'angle *DCB* = l'angle *CBE*; Donc *CD* est parallele à *EB**; donc *92.
AD, *DB* : : *AC*, *CE*, ou *CB**. *198.

Theorême.

Si de la pointe C *de l'un des angles d'un tr:* ABC *on mene une ligne dr:* CD *qui divise le coté oposé* AB *en deux parties* AD, DB *proportionnelles aux cotés* AC, CB *avec lesquels elles concourrent, elle divisera cet angle en deux parties égales* ACD, DCB. 207. fig. 187.

Prolongez encore *AC* par son extremité *c*

jusques à ce que le prolongement *CE* soit égal à *CB* ; & menez la droite *BE*.

Puisque *AD*, *DB* : : *AC*, *CB* ou *CE*, il s'en-
*199. suit que *CD* est parallele à *EB**; par conséquent
*89. que l'angle *ACD* = l'angle *CEB**, & que l'an-
*88. gle *DCB* = l'angle *CBE**. Or les cotés *CB*, *CE* du tr: *CBE* étant égaux il en resulte que l'angle *CEB* = l'angle *CBE*; donc l'angle *ACD* = l'angle *DCB*.

Theorême.

208. *Si de la pointe* C *de l'angle d'un tr: rectangle* ABC,
fig. 188. *on mene a l'hypotenuse* AB *une perp:* CD, *qui tom-*
*76. *bera dans les deux angles aigus* A, B*, *& qui par conséquent divisera l'hypoten:* AB *en deux parties* AD, DB ; 1°. *Chacun des deux autres cotés, par ex:* AC, *sera la moïenne proportionnelle entre la partie joignante* AD, *& l'hypot:* AB, *c'est à dire que* AD, AC : : A , AB. 2°. *La perp:* CD *sera la moïenne proportionnelle entre les deux parties* AD, DB *de l'hypot:* AB, *c'est à dire que* AD, DC : : DC, DB.

Les angles *ADC*, *ACB* des tr: *ADC*, *ACB* étant droits, par la suposition, & l'angle *A* étant commun à ces deux triangles, il s'ensuit que leurs troisiémes angles *ACD*, *ABC* sont aussi é-
116. gaux; par conseq: que *AD*, *AC* : : *AC*, *AB**.
*202. On démontrera de la même maniére que les tr: *DBC*, *BCA* sont équiangles ; d'ou l'on conclura que *BD*, *BC* : : *BC*, *BA*.

Puisque les angles *ADC*, *CDB* des tr: *ADC*, *CDB* sont droits, & que , comme on vient de le voir, les angles *ACD*, *CBD* sont égaux, de même que les angles *CAD*, *BCD*, il en re-
*202. sulte que *AD*, *DC* : : *DC*, *DB**.

Défi-

Définitions.

Les ſurfaces planes *abcde, ABCDE* terminées par plus de quatre lignes droites, s'apellent en général des *Polygones*. 209. *fig.* 189, & 190.

Aver: Je ne laiſſerai pas de comprendre ſous ce nom celles là même qui ne ſont terminées que par quatre lignes droites.

Toute ligne droite comme *eb*, ou *ec*, menée dans un Polygone *abcde*, dés la pointe *e* de l'un de ſes angles à la pointe *b* ou *c* d'un autre, ſe nomme *Diagonale*. 210. *fig.* 189.

Les Diagonales des Polygones ſemblables *abcde, ABCDE*, par ex: *eb, EB* qui joignent les pointes *e, b*; *E, B* angles égaux correſpondans, ſont dites *ſemblablement poſées* dans ces deux Polygones.

Theorême.

Supoſé qu'on diviſe deux Polygones ſemblables abcde ABCDE, *en pluſieurs tr: par des diagonales ſemblablement poſées*, eb,ec; EB, EC; *les tr:* abe, ebc, ecd *du premier Polygone, pris un à un, ſont équiangles aux tr:* AB, EBC, ECD, *du ſecond, formés par les lignes ſemblablement poſées.* 211. *fig.* 189, & 190.

1°. On ſupoſe que l'angle *a* = l'angle *A*, & que *ea,ab::EA,AB;* donc les tr: *eab,EAB* ſont équiangles* .2°. Puiſque l'angle *abe* = l'angle *ABE*, & qu'on ſupoſe que l'angle *abc* = l'angle *ABC*, il s'enſuit que l'angle *ebc* = l'angle *EBC*: De plus, puiſque les tr: équiangles *eab*, *EAB* donnent cette proportion *eb, EB* : : *ab,AB**, & qu'on *204. *202.

qu'on ſupoſe celle-ci *bc*, *BC* : : *ab* , *AB* il en réſulte que *eb*, *EB* : : *bc*, *BC*; par conſequent *alternado* , que *eb* , *bc* : : *EB*, *BC*. Donc les tr: *ebc*, *EBC*
204. ſont équiangles. 3ò. On prouvera de la même maniére que les tr: *ecd*, *ECD* ſont auſſi équiangles.

Corollaire.

212. *Les diagonales* eb , ec *d'un Polyg:* abcde *ſont proportionnelles aux diagonales ſemblablement poſées* EB,
fig.189, 190. EC *de tout autre Polygone ſemblable* ABCDE.

Car les triangles *ebc*, *EBC* étant équiangles,il
*202. s'enſuit que *eb* , *ec* : : *EB* , *EC**.

213. *Les diagonales* eb , ec *d'un Polygone* abcde *ont le*
fig.189, 190. *même raport aux diag: ſemblablement poſées* EB, EC *de tout autre Polygone ſemblable* ABCDE ; *&* *ce raport eſt égal à celui d'un coté quelconque* ab *du premier Polygone au coté ſemblablement poſé* AB , *du ſecond.*

Car puiſque *eb*,*ec* : : *EB*, *EC*, comme on vient de le voir, *eb*, *EB* : : *ec*, *EC*. Or *eb* , *EB* : : *ab* , *AB* , à cauſe des tr: équiangles *eab*, *EAB*; donc les diagonales *eb*, *ec*, &c.

Problême.

214. *Une ligne droite* CA *diviſée en tel nombre de parties*
fig.191. *qu'on voudra , par ex: en trois* CE, EH, HA , *étant donnée diviſer une autre ligne droite donnée* cb *en ce même nombre de parties* cn , nq , qb , *en ſorte que les derniéres ſoient proportionnelles aux premiéres.*

1ò. Aprés avoir mené du point *C* la droite *CB* qui

qui faſſe avec *CA* l'angle *ACB* que vous déterminerez à diſcretion, faites *CB* égale à *cb*, & menez la droite *AB*. 2°. Des points *E, H* menez à la ligne *AB* les paralleles *EN, HQ* qui diviſeront *CB* en trois parties *CN, NQ, QB* qui ſeront proportionnelles aux parties *CE, EH, HA* de *CA**. 3°. Faites *cn* égale *CN*, & *nq* égale à *NQ*; aprés quoi vous aurez évidemment réſolu le Problême. *198.

Problême.

Diviſer une ligne droite donnée cb *en autant de parties égales qu'on voudra; par ex: en trois.* 2. *fig.*

Menez une ligne dr: indefinie *CA*, & prenez de ſuite ſur cette droite, trois parties égales *CE, EH, HA*. Enſuite diviſés *cb* en trois parties *cn, nq, qb* proportionnelles à ces premiéres*. Cela poſé, il eſt encor clair que le Problême ſera reſolu. *2

Problême.

Trouver la quatriéme proportionelle à trois lignes droites données ce, ea, en.

Aïant fait un angle *C* de telle grandeur qu'on voudra, & dont les jambes, ſoient indéfinies, on prendra ſur l'une de ces jambes *CE* égale à *ce*, *EA* égale à *ea*; & ſur l'autre jambe, *CN* égale à *cn*. Enſuite on menera la droite *EN*, & du point *A* la parallele *AB* à cette droite *EN*. Je dis, & il eſt clair, que *NB* ſera la ligne qu'il falloit trouver; c'eſt à dire que *CE, EA : : CN, NB**. 21(*fig.* 193. *198.

Rem. Le Problême de trouver la troiſiéme proportionnelle à deux lignes droites données, ſe reduit au précédent.

Pro-

Problême.

217. *Trouver le moïenne proportionnelle entre deux lignes*
fig. 194. *droites données* ad, db.

1°. Prenez sur une ligne droite indéfinie *AB*, la partie *AD* égale à *ad*, & la partie *DB* égale à *db*. 2°. Divisez *AB* en deux parties égales *AO*, *OB*; & du point *O* décrivez avec le raïon *OA*, le demi cercle *ACB*. 3°. Du point *D* menez au diametre *AB* la perp: *DC* qui sera la moïenne proportionnelle entre les lignes *AD*, *DB*, & par conséquent entre leurs égales *ad*, *db*.

Menez les droites *AC*, *BC*. L'angle *ACB* du
*172. tr. *ABC* est droit*, & la ligne *CD* est perpendiculaire à l'hypotenuse *AB*; donc *AD*, *DC*
*208. :: *DC*, *DB**.

Problême.

218. *Décrire un tr:* ABC *semblable à un tr: donné* abc,
fig. 195, *qui ait pour coté homologue d'un coté assigné* ab *du*
& 196. *triangle donné* abc, *une ligne donnée* AB.

1°. Faites ces deux proportions *ab*, *AB* :: *ac*, *AC*; *ab*,*AB* :: *bc*, *BC* 2°. Des points *A*,*B* & avec les raïons *AC*, *AB* décrivez du même coté de *AB*, des arcs de cercle *Cm*, *Cn*, qui se couperont
*103. en un point *C* hors de cette ligne*. 3°. Des points *A*, *B* menez par le point *C* les droites *AC*, *BC* qui formeront avec *AB* le tr: *ABC* dont les trois angles *A*,*B*,*C*, pris un à un, seront égaux aux trois angles *a*, *b*, *c* du tr: *abc**; & dont les cotés *AB*, *BC*, *CA* seront proportionnels, par la con-

conſtruction, aux cotés ſemblablement poſés *ab, bc, ca* du même tr: *abc*. Ainſi ce tr: *ABC* ſera ſemblable au tr: *abc*.

Problême.

Faire un Polygone ABCDE *ſemblable à un Polygone donné* abcde, *& qui ait pour coté homologue d'un coté aſſigné* ab *du Polygone donné* abcde, *une ligne donnée* AB. 219. *fig.* 197, & 198.

1ò. Menez à diſcretion dans le Polygone donné *abcde*, des diagonales *eb*, *ec* qui le diviſent en pluſieurs tr: *eab*, *ebc*, *ecd*. 2ò. Faites le tr: *ABE* ſemblable au tr: *abe*, & qui ait pour coté homologue du coté *ab*, la droite *AB**. *218. Faites enſuite le tr: EBC ſemblable au tr: *ebc*, & dont les cotés homologues des cotés *eb*, *bc* ſoient les lignes droites *EB*, *BC*, dont la premiére *EB* ſera déja trouvée. Enfin faites le tr: *ECD* dont les cotés homologues des cotés *ec*, *cd* ſoient les lignes *EC*, *CD*. Aprés ces operations vous aurez le Polygone ABCDE tel qu'il falloit le décrire.

Premiérement, puiſque par la conſtruction, les tr: *EAB*, *EBC*, *ECD* du Polygone *ABCDE*, pris un à un, ſont ſemblables aux tr: *eab*, *ebc*, *ecd* du Polygone donné *abcde*, il eſt bien évident que les angles *EAB*, *ABC*, *BCD*, &c, du Polygone ABCDE, pris un à un, ſont égaux aux angles *eab*, *abc*, *bcd*, &c, du Polygone *abcde*. En ſecond lieu, par la même raiſon, *ea*, EA : : *ab*, AB; *bc*, BC : : *be*, BE : : *ab*, AB, ainſi *bc*, BC : : *ab*, AB. *cd*, CD : *ec*, EC : : *bc*, BC : : *ab*, AB ; Ainſi *cd*, CD : : *ab*, AB, &c. Donc le Polyg: ABCDE a les proprietés marquées dans le Problême.

CHAPITRE II.

Des Raports Géometriques des Surfaces.

Theorême.

220. *Un Parallelogramme* ABCD *est à un autre Parallel:* MNPQ *en raison composée de celle de sa baze* AB *à la baze* MN *de l'autre, & de celle de sa hauteur* DE *à la hauteur* QR *de l'autre,*

fig. 199, & 200.

Soient nommés AB,*a;* DE,*b;* MN,*m;* QR,*n,* & il s'agira de démontrer que ABCD, MNPQ :: *ab,mn,* ce qui est bien clair puisque *ab, mn* expriment les surfaces de ces Parallelogrammes *.

*142.

Corollaires.

221. *Si les hauteurs* DE, QR *de deux Parallelogram.* ABCD, MNPQ *sont égales, ils sont entr'eux comme leurs bazes ; c'est à dire* ab,mn : : a, m.

fig. 199, & 200.

Car dans cette suposition *b*=*n* par conséquent *ab*=*an.* Or on sait que *an, mn: : a, m;* Donc si les hauteurs &c.

222. *Si les bazes* AB, MN *de deux Parallel.* ABCD, MNPQ *sont égales, ils sont entr'eux comme leur hauteur* DE, QR*; c'est à dire* ab,mn : : b, n.

fig. 199, 200.

Dans ce cas *a*=*m,*par conséquent *ab*=*mb.* Or il est démontré que *mb, mn* : : *b,n;* Donc si les bazes &c.

Si les

Si les bazes AB, MN *& les hauteurs* DE, QR *de deux Paral:* ABCD, MNPQ *sont reciproquement proportionelles, c'est à dire si* AB, MN : : QR, DE ; *ces Paral: sont égaux en surface.* 223. fig. 199. 200.

Parce qu'alors *a, m : : n, b* d'ou il suit que *ab==mn.*

Si deux Paral: ABCD, MNPQ *sont égaux en surface leurs bazes* AB, MN, *& leurs hauteurs* DE, QR *sont réciproquement proportionnelles.* 224. fig. 199, 200.

Car de ce que *ab==mn*, il en résulte que *a, m : : n, b.*

Si un angle A *d'un Parall:* ABCD *est égal à un angle* M *d'un autre Parall:* MNPQ, *& que les cotés* AB, AD *qui forment le premier angle* A, *soient réciproquement proport: aux cotés* MN, MQ *qui forment le second angle* M, *c'est à dire que* AB, MN : : MQ, AD ; *ces deux Parallelogr: sont égaux en surface.* 225. fig. 199, 200.

Car les tr: rectangles *AED, MRQ* étant équiangles, donnent *QR, DE : : MQ, AD**. Or puisque *AB, MN : : MQ, AD* par la sup:, il s'ensuit que *AB, MN : : QR, DE* ; par conséquent que les Parall: *ABCD, MNPQ* sont égaux en surface*. *202. *223.

Si un angle A *d'un Parall:* ABCD *est égal à un angle* M *d'un autre Parall:* MNPQ, *& que ces deux Parall: soient égaux en surface ; les cotés* AB, AD *qui forment le premier angle* A, *sont réciproquement proport. aux cotés* MN, MQ *qui forment le second.* 226. fig. 199, 200.

Les tr: équiangles *AED, MRQ* donnent encore *MQ, AD : : QR, DE**. Or puisque les Parall: sont égaux en surface, *AB, MN : : QR, DE**, donc *AB, MN : : MQ, AD.* *202. *224.

Theorême.

227. *Les sept articles précédens étant appliqués aux Triangles sont encore veritables.*
fig. 201, 202.

Ils se démontrent de la même maniére.

Problême.

228. *Faire un tr:* ABC *dont la baze* AB, *& un angle* CAB *sur cette baze, soient donnés, qui soit égal en surface à un tr: donné* MNP.
fig. 202. 203.

1°. Menez du point *A* la perp: indefinie *AE* à la baze *AB*. 2°. Faites la proportion *AB*, *MN* : : *PQ*, *AE*. 3°. Menez par le point *E* la parallele *EC* à la baze *AB*. 4°. Du point *C* ou cette parallele coupera la ligne *AC*, menez au point *B* la droite *CB*; & vous aurez le tr: *ABC* qu'il falloit achever. Il est clair qu'il n'y a qu'à démontrer que le tr: *ABC* est égal en surface au tr: *MNP*.

Soit menée du point *C* à la baze *AB* du tr:
*82. *ABC* la perp: *CD* qui sera égale à la perp. *EA**. Puisque *AB*, *MN* : : *PQ*, *EA* ou *CD*, par la construction, il s'ensuit que le tr: *ABC* est égal
*227. en surface au tr: *MNP**.

Problême.

229. *Faire un tr:* ABC *dont la hauteur* CD, *& un angle* CAB *sur la baze* AB *soient données, qui soit égal en surface à un tr: donné* MNP.
fig. 202, 203.

1°. Du point *A* menez à la baze *AB* la perp: *AE* que vous ferez égale à la hauteur donnée du

du tr. qu'il faut décrire ; & menez par le point *E* à la même baze *AB* la parallele *EC* qui coupera en un point *c* la droite *AC*. 2°. Faites la proportion *CD*, *PQ* : : *MN*, *AB*. 3°. Menez la droite *CB*, & vous aurez le tr. *ABC* qu'il falloit décrire.

On n'a pour s'en convaincre qu'a mener encor du point *c* la perp. *CD* à la baze *AB* de ce tr. *ABC*, & rapeller l'article 227.

Problême.

Faire un tr: ABC *dont la hauteur* CD, *& un angle* CAB *sur la baze* AB, *soient données, qui soit égal en surface à un Polygone donné* MNPQR. 230. fig. 204, 205.

1°. Menez à volonté dans le Polyg: donné des diagonales *RN*, *RP*, qui le divisent en plusieurs tr. *RMN*, *RNP*, *RPQ*. 2°. Faites le tr. *CAE* qui ait pour hauteur la dr. *CD*, & pour l'un de ses angles sur la baze *AE*, l'angle *CAE*, & qui soit égal en surface au tr. *RMN**. Faites ensuite le tr. *CEF* qui ait pour hauteur la même droite *CD*, & pour l'un de ses angles sur la baze *EF* l'angle *CEF*, & qui soit égal en surface au tr. *RNP*. Enfin décrivez le tr: *CFB* qui ait pour hauteur la même droite *CD*, & pour l'un de ses angles sur la baze *FB*, l'angle *CFB*, & qui soit égal en surface au tr. *RPQ*. Après toutes ces opérations vous aurez le tr. *ABC* qui sera évidemment celui qu'il falloit décrire.

*229.

Theorême.

Lorsque deux tr: abc, ABC *sont semblables, la raison* 231.

fig. 206. 207. *son du premier* abc, *au second* ABC *est doublée de celle d'un coté quelconque* ab *du premier à son homologue* AB.

Menez des points *c, C* les perp. *ed, CD* aux cotés *ab, AB.*

Les tr. équiangles *adc, ADC* donnent *cd,*
*202. *CD : : ac, AC**. Or *ab, AB : : ac*, AC, par la sup:; donc *ab, AB : : cd, CD*. Maintenant, puisque la raison du tr. *abc* au tr. *ABC* est composée de
227. ces deux dernières raisons, il est clair qu'elle est doublée de celle de *ab* à *AB.*

Corollaires.

232. fig. 206. 207. *Suposé que deux tr.* abc, ABC, *soient semblables, le premier* abc *est au second* ABC, *comme le quarré d'un coté quelconque* ab *du premier est au quarré de son homologue* AB.

Le tr. *abc* est au tr. *ABC* en raison doublée de celle de *ab* à *AB*, comme on vient de le voir. Or suivant la définition des raisons doublées, *ab*×*ab* est à *AB*×*AB*; en raison doublée de *ab* à *AB*; donc le tr. *abc*, tr. *ABC* : : *ab* × *ab*, *AB*×*AB.*

233. fig. 206, 207. *Si deux tr:* abc, ABC *sont semblables, la premier* abc *est au second* ABC, *comme un cotés quelconque* ab *du premier est à la troisiéme proportionnelle* EF *à ce coté* ab *&* *à son homologue* AB.

Le tr: *abc* est au tr: *ABC* en raison doublée de celle de *ab* à *AB*. Or la raison de la premiére *ab* des trois lignes *ab, AB, EF*, à la derniére *EF* est composée de celles de *ab* à *AB*, & de *AB* à *EF*, d'où il suit, puisque ces deux derniéres rai-

raiſons ſont ſupoſées égales, que la raiſon de *ab* à *EF* eſt doublée de celle de *ab* à *AB*: Donc le tr. *abc*, tr. *ABC* : : *ab*,*EF*.

Theorême.

Supoſé que deux Polygones abcde ABCDE *ſoient ſemblables, le premier eſt au ſecond,* 1ò, *En raiſon doublée de celle d'un coté quelconque* ab *du premier à ſon homologue* AB ; 2ò. *Comme le quarré d'un coté quelconque* ab *du premier, au quarré de ſon homologue* AB ; 3ò. *comme un coté quelconque* ab *du premier eſt à la troiſiéme proportionnelle* GH *à ce coté* ab *&* *à ſon homologue* AB. 234. fig. 208, 209.

Que ces Polygones ſoient diviſés en tr: par les diag: ſemblablement poſées *eb*, *ec*, *EB*, *EC*.

Les tr. *eab*,*EAB* ſont ſemblables* ; ainſi le premier eſt au ſecond en raiſon doublée de *ab* à *AB*: Par la même raiſon, le tr. *ebc* eſt au tr. *EBC* en raiſon doublée de *bc* à *BC* ; & le tr. *ecd* eſt au tr. *ECD* en raiſon doublée de *cd* à *CD*. Or *ab*, *AB* : : *bc*, : : *BC* : : *cd*, *CD*, par la ſup.; d'où il ſuit que les raiſons doublées de chacune de ces raiſons, ſont égales. Donc le tr. *eab*, tr. *EAB* : : le tr. *ebc*, tr. *EBC* : : le tr. *ecd*, *ECD*; par conſéquent le Polyg. *abcde*, Polyg. *ABCDE* : : le tr. *eab*, tr. *EAB*. Cela poſé, puiſque le tr. *eab* eſt au tr. *EAB*, 1ò. en raiſon doublée de *ab* à *AB**; 2ò. comme $ab \times ab$ eſt à $AB \times AB$*; 3ò. comme *ab* eſt à *GH**, il eſt évident que la raiſon du Polygone *abcde* au Polygone *ABCDE* eſt égale à ces trois derniéres raiſons.

*211. *231. *232.

Pro-

Problême.

235. *Faire un tr.* ABC *semblable à un tr: donné* abc, *& qui soit à ce tr. comme une ligne donné:* EF *est à*
fig. 206, 207. *un coté assigné* ab *du tr: donné* abc.

1°. Cherchez la moïenne proportionnelle *AB* entre les lignes données *ab, EF,* 2°. Faites le tr. *ABC* semblable au tr. *abc*, & qui ait cette moienne proport. *AB* pour coté homologue
*218. du coté assigné *ab**; après quoi le Problême sera résolu.

Le tr. *ABC* est semblable au tr. *abc*, par la construction. Il n'y a donc qu'a faire voir que le tr. *ABC*, tr. *abc* :: *EF ab*; ou *invertendo* que le tr. *abc*, tr. *ABC* :: *ab, EF*, ce qui a été démon-
233. tré.

Problême.

236. *Faire un Polygone* ABCDE *semblable à un Polygo-*
fig. 208, 209. *ne donné* abcde, *& qui soit à ce Polygone comme une ligne donné* GH *est à un coté assigné* ab *du Polyg: donné* abcde.

La construction & la demonstration sont les mêmes que celles du Problême précédent.

Problême.

237. *Faire un tr:* ABC *semblable à un tr: donné* abc, *&*
fig. 210, 211, & 212. *qui soit égal en surface à un autre triangle donné* EFG.

Aiant mené des points *c, G,* les perp. *cd, GH* aux lignes *ab, EF,* faites la proportion *cd, GH* :: *EF,*

EF, EK. 2°. Cherchez la moïenne proportionnelle *AB* entre les lignes *ab*, *EK*. 3°. Decrivez le tr: *ABC* semblable au tr. *abc*, & qui ait cette moïenne proportionnelle *AB* pour coté homologue du coté *ab*. Je dis, & c'est tout ce qu'il faut démontrer, que le tr. *ABC* sera égal en surface au tr: *EFG*.

1°. Les tr: *abc*, *ABC* sont équiangles, par la construction, & *ab*, *AB* :: *AB*, *EK*; donc le tr: *abc*, tr. *ABC* :: *ab*, *EK**. 2°. Le tr: *abc*, tr. *GEF* :: *ab*⨯*cd*, *EF*⨯*GH** Or *cd*, *GH* : : *EF*, *EK*; par conséqnent *EF*⨯*GH*=*EK*⨯*cd*: Donc le tr: *abc*, tr: *GEF* : : *ab*⨯*cd*, *EK*⨯*cd* :: *ab*, *EK*. 3°. Maintenant, puisque le tr: *abc*, tr: *ABC* :: *ab*, *EK*, & que le tr: *abc*, tr: *EFG* :: *ab*, *EK*, il s'ensuit que le tr: *abc*; tr. *ABC* : : le tr: *abc*, tr: *EFG*; par conséquent que le tr: *ABC*= tr: *EFG*.

*233. *227.

Problême.

Faire un Polygone ABCD *semblable à un Polyg: donné* abcd, *& qui soit égal en surface à un autre Polygone donné* RSTVX. 238. fig. 213, 214, 215 216, & 217.

1°. Aiant mené dans le Polyg. donné *abcd* la diag. *db* qui le divise en deux tr: *abd*, *dbc* décrivez le tr. *GEL*, dont vous déterminerez à discrétion la hauteur *GY*, & un angle *GEL* sur la baze *EL*, qui soit égal en surface au tr: *abd**. Décrivez ensuite le tr: *GLF* qui ait pour hauteur la droite *GY*, & pour l'un des ses angles sur la baze *LF*, l'angle *GLF*, & qui soit égal en surface au tr. *dbc*; après quoi vous aurez le triangle *GEF* égal en surface au Polygone *abcd*. *229.

2°. Faites de la même maniére le tr. *KHI* égal en surface au Polyg: *RSTVX*.

3°. Divisez un coté quelconque *HI* de ce dernier tr: *HIK*, en deux parties *HO*, *OI* qui soient proportionnelles aux deux parties *EL*, *LF* de la baze *EF* du tr: *EFG*; & menez la droite *KO*.

4°. Faites le tr: *ABD* semblable au tr: *abd*, &
*237. qui soit égal en surface au tr. *KHO**. Faites ensuite le tr: *DBC* semblable au tr. *dbc*, & qui ait
*218. la ligne *DB* pour coté homologue du coté *db**. Aprés cés opérations vous aurez le Polygone *ABCD* semblable au Polyg: *abcd* & égal en surface au Polyg: *RSTVX*, ou au tr: *KHI*.

Premiérement, les tr: *ABD*, *DBC*, pris un à un, sont semblables aux tr: *abd*, *dbc*, par la construct. Donc le Polygone *ABCD* est semblable au Polyg: *abcd*, par la démonstration de l'article 219.

En second lieu, puisque le tr: *ABD* est au tr.
*231. *abd* en raison doublée de *AB* à *ab**, & que le tr: *DBC* est au tr: *dbc* en raison doublée de *BC* à *bc*; il s'ensuit, à cause de l'égalité des raisons de *AB* à *ab*, & de *BC* à *bc*, que le tr. *ABD*, *abd* :: *DBC*, *dbc*, & *alternando* que *ABD*, *DBC* : : *abd*, *dbc*. Or *abd*, *dbc* : : *GEL*, *GLF*, (par la constr.) :: *EL*,
*227. *LF** :: *HO*, *OI*, (par la construction) : : *KHO*, *KOI**; Donc *ABD*, *DBC* : : *KHO*, *KOI*. Maintenant, puisque *ABD*=*KHO*, par la construction, il en résulte, que *DBC*=*KOI*; par conséquent que le Polygone *ABCD*=*KHI*.

L I-

LIVRE TROISIEME.

Des Solides.

SECTION I.

Des Lignes droites, & des surfaces planes, considerées par raport à la situation qu'elles peuvent avoir, les premiéres à l'égard des secondes, & les secondes les unes à l'égard des autres.

CHAPITRE I.

Des Ligues droites considerées par raport à la situation qu'elles peuvent avoir à l'égard des Plans.

Définition.

LEs surfaces qui sont droites en tout sens s'apellent des surfaces *planes*, ou simplement des *Plans*.

Corollaires.

Si on mene une ligne droite EF *par deux points* E,F *d'un* fig. 218.

d'un plan ABCD, *tous les autres points de cette ligne seront sur ce plan.*

239. *Une ligne droite* EG *qui rencontre un plan* ABCD *de maniére qu'elle n'est pas en ligne droite avec lui, ne le rencontre qu'en un point.*

fig. 218. *On peut faire passer un plan* ABCD *par trois points données* A, B, C *qui ne soient pas en ligne droite, & l'on en peut faire passer qu'un seul.*

fig. 218. *On peut donc faire passer un plan* ABCD, *& l'on n'en peut faire passer qu'un seul,* 1ò. *Par une ligne droite donnée* AB, *& par un point* C *donné hors de cette ligne;* 2ò. *par deux lignes droites* AB, BC *qui font un angle* ABC.

240. fig. 218. *Lorsque deux plans ont trois points communs* A, B, C *qui ne sont pas en ligne droite, ils ne font qu'un même plan.*

241. fig. 219. *Suposé que deux plans* ABCD, BEFC *se rencontrent de maniére qu'ils ne fassent pas un même plan, l'étendue où ils se rencontrent est une ligne droite.*

1ò. Car s'ils se rencontroient en quelque point qui ne fut pas en ligne droite avec les points *C, B* où je supose qu'ils se rencontrent,
240. ils feroient un même plan, ce qui est contraire à la suposition.

Avert: Lorsque deux plans *ABCD, BEFC* se rencontrent ainsi, la droite *BC* où ils se rencontrent se nomme leur *Section*, soit qu'ils se coupent en efet, ou qu'ils se rencontrent sans se couper ; & c'est parce que dans le dernier cas il n'y a, pour qu'ils se coupent, qu'a les prolonger par cette ligne *BC*.

On

On peut prolonger un plan ABCD *de tous cotés & aussi loin qu'on voudra.* 242. fig. 219.

Un plan ABCD *ne peut pas avoir du même coté deux prolongemens diférens* BHGC, BEFC. 243. fig. 219.

La surface plane ABCD *terminée par quelques lignes qu'on veuille supofer, est moindre que toute autre surface terminée par les mêmes lignes.* 244. fig. 220.

Si une surface plane ABCD *terminée par telles lignes qu'on voudra, est moindre que toute autre surface terminée par les mêmes lignes, elle est plane.* 245. fig. 220.

Définitions.

Par un point *F. hors* d'un plan *ABCD* on entend un point qui est non seulement hors de ce plan *ABCD*, mais encor de son prolongement. 246. fig. 220.

Le point *E* d'un plan *ABCD*, d'où une ligne *EF* s'éleve sur ce plan, sera nommé le *Pied* de cette ligne. 247. fig. 220.

Theorême.

Supofé que du point A *ou deux lignes droites* CD, EF *menées sur un plan* P *se coupent, il s'en éleve une troisiéme* AB *qui soit perpendiculaire à chacune des deux premiéres* CD, EF; *je dis qu'elle sera perp. à toute autre ligne droite* HI *menée sur ce plan* P *par le pied* A *de cette ligne* AB. 248. fig. 221.

Faites à discretion les lignes *AC*, *AD* égales entr'elles, de même que les lignes *AE*, *AF*, & menez les droites *CE*, *DF*, *BC*, *CH* &c.

1°. Les

*41. 1ò. Les tr: *ACE*, *ADF* ſont égaux*; ainſi *CE*═*DF*, & l'angle *ACH*═ l'angle *ADI*. Or l'angle *ACH* étant égal à l'angle *ADI*, il eſt clair
*119. que les tr: *ACH*, *ADI*, ſont égaux*; par conſéquent que *AH*═*AI*, & que *CH*═*DI*. 2ò. La ligne *BA* étant perp: aux ligne *CD*, *EF*, par la ſup:, & les points *C*, *D* étant à égale diſtance du point *A*, de même que les points *E*, *F*, par la conſtruction; il s'enſuit que *BC*═*BD* & que *BE*═*BF*. Donc, *CE* étant auſſi égale à
*43. *DF*, les tr: *BCE*, *BDF* ſont égaux*; ainſi l'angle *BCH*═ l'angle *BDI*. 3ò. Puiſque *BC*═*BD*, que *CH*═*DI*, & que l'angle *BCH*═ l'angle
*41. *BDI*, les tr: *BCH*, *BDI* ſont égaux*, par conſéquent *BH*═*BI*. 4ò. Maintenant puiſque *AH*═*AI*, & que *BH*═*BI*; il en réſulte que
*70. *BA* eſt perp: à la droite *HI**.

Définitions.

249. *fig.*222. Une ligne droite AB qui s'éleve d'un plan *P* perpendiculairement à toutes les lignes droites *CD*, *EF* menées ſur ce plan *P* par le pied *A* de cette ligne *AB*, eſt dite *perpendiculaire* à ce plan *P*.

Une ligne droite *AM* qui s'éleve d'un plan *P* de maniére qu'elle n'eſt pas perp: à toutes les lignes droites *CD*, *EF* menées ſur ce plan *P* par le pied *A* de cette ligne *AM*, eſt dite *oblique* ou *inclinée* à ce plan *P*.

Problême.

250. *fig.*223. *D'un point donné* A *ſur un plan* P *élever une perp:* AB *à ce plan* P.

On

On se servira pour resoudre ce Problême, d'un instrument *c a b a d** formé de deux plans *cad, bad*, qui se rencontrent de maniére qu'ils ne fassent pas un même plan, & que leur commune Section *ba* soit perp: aux cotés *ac, ad* de ces plans. On mettera cet instrument sur le plan *P* ensorte que le point *a* soit sur le point *A*, & que les lignes *ac, ad* soient couchées le long de ce plan; après quoi on menera le long de *ab* la droite *AB* qui sera donc perp: aux droites *ac, ad,* & par la même au plan *P**. *f.224. *248.

Cette solution & la suivante me paroissent préférables dans la pratique à celles d'Euclide.

Problême.

D'un point donné B *hors du plan* P, *abaisser une perp:* BA *à ce plan* P. 251. fig.223.

Aiant placé l'instrument *cab ad* sur le plan *P* de maniére que les lignes *ac, ad* étant couchées le long de ce plan, la droite *ab* passe par le point *B*, on menera le long de *ba*, la droite *BA* qui sera perp: au plan *P**. *248.

Theorême.

D'un point donné A *sur un plan* P *on ne peut élever qu'une perp:* AB *à ce plan* P. 252. fig.225.

Suposé que du point *A* on mene hors du plan *P* une ligne droite *AM* diférente de *AB*, & que la commune Section du plan *BAM* & du plan *P* soit la droite *CD*; la ligne *AB* sera perp: à *CD*; ainsi la ligne *AM* sera oblique: à

CD,

CD, & par conséquent au plan *P*. Donc, d'un point donné *A* &c.

Theorême.

253. *D'un point donné* B *hors d'un plan* P *on ne peut abaisser qu'une perp:* BA *à ce plan* P.
fig. 226.

Car si du point *B* on mene au plan *P* une ligne droite *BD* diférente de *BA*, & qu'on joigne les points *A*, *D* par la droite *AD*, *BA* sera perp: à *AD*; ainsi *BD* sera oblique à cette droite *AD*, & par la même au plan *P*.

Theorême.

254. *La perp:* BA *menée à un plan* P *des un point* B *hors du plan; est plus courte que toute autre ligne* BD *menée de ce point* B *à ce même plan* P.
fig. 226.

Si on joint les points *A*, *D* par la droite *AD*, on verra que la ligne *BA* étant perp: à ce plan *P*; l'est par là même à cette droite *AD*; d'ou
*68. l'on conclura que *BA*<*BD**.

Définition.

255. La perp: *BA* menée à un plan *P* des un point *B* hors du plan, s'apelle la *distance* de ce point *B* à ce plan *P*.
fig. 226.

Theorême.

256. *Un point quelconque* B *de la perp:* AB *à un plan* P *est également éloigné des points* C, D *de ce plan, qui sont à égale distance du pied* A *de la perpendiculaire.*
fig. 227.

La

La ligne *BA* eſt un coté comun aux tr: *BAC*, *BAD*; *AC*=*AD*, par la ſupoſition ; & l'angle *BAC*= l'angle *BAD*; puiſqu'on ſupoſe que chacun de ces angles eſt un angle droit : Donc les tr: *BAC*, *BAD* ſont entiérement égaux*; *41.
ainſi *BC*=*BD*.

Theorême.

257. fig. 227.

Supoſé qu'un point B *de la perp:* AB *à un plan* P *ſoit également éloigné de divers points* C, D *de ce plan ; ces points* C, D *ſont à égale diſtance du pied* A *de la perpendiculaire.*

Les angles *BAC*, *BAD* des tr: *BAC*, *BAD* ſont droits ; la ligne *BA* eſt un coté commun à ces deux tr:; les hypotenuſes *BC*, *BD* ſont égales : Donc ces deux tr: ſont entiérement égaux*; *120.
ainſi *AC*=*AD*.

Lemme.

258. fig. 228.

Lors qu'un point A *ou* B, *pris ſur un plan* P, *ou hors de ce plan, eſt à égale diſtance de trois points* C, D, E *du même plan* P, *ces trois points* C, D, E *ne ſont pas en ligne droite.*

Supoſé, en premier lieu, que le point également éloigné des points *C*, *D*, *E* ſoit ſur le plan *P*, c'eſt à dire que ce ſoit le point *A*. Du point *A* & avec un raïon égal à la diſtance *AC* ou *AD*, ou *AE*, on décrira ſur le plan *P* une circonférence de cercle, qui paſſera donc par les points *C*, *D*, *E* ; d'où l'on conclura que ces points *C*, *D*, *E* ne ſont pas en ligne droite*. *155.

Supoſé, en ſecond lieu, que le point égale-

ment éloigné des points *C,D,E* ſoit hors du plan*P*, c'eſt à dire que ce ſoit le point *B*. Si les points *C,D,E* étoient en ligne droite, on pourroit faire paſſer un plan par le point *B* & par
*139. ces trois points *C,D,E**; d'où il ſuit qu'il pourroit y avoir ſur une même plan un point *B* également éloigné de trois points *C, D, E* qui ſeroient en ligne droite. Or cette conſéquence eſt contraire à celle qu'on vient d'établir; donc il eſt impoſſible que les points *C, D, E* ſoient en ligne droite.

Theorême.

259. *Tout point* G *également éloigné de trois points* C, D,E *d'un plan* P, *eſt un point de la perp: indéfinie* AB
fig. 229. *élevée à ce plan* P, *dés le point* A *qui eſt à égale diſtance des trois mêmes points* C, D, E.

Il faut d'abord remarquer que le point G étant également éloigné des points *C, D ,E,* il en reſulte que les points *C , D , E* ne ſont
*258. pas en ligne droite *; par conſéquent qu'il y a ſur le plan *P* un point *A* qui eſt à égale diſtance de ces points *C, D, E,* & qu'il n'y
263. en a qu'un ſeul. Cela poſé, Puiſque le point *G* eſt également éloigné des points *C,D,E;* par conſéquent que la perp: menée du point *G* au plan *P*, perp: qu'il faut imaginer, rencontre le plan *P* en un point qui eſt a égale diſtance des
*257. points *C, D, E** ; cette perp: le rencontre au point *A*. Donc elle eſt la même que la perp:
*252. *AB**; ainſi le point *G* eſt un point de la perp: *AB*.

Corollaires.

260. *La droite indéfinie qui paſſe par deux points* G, B, *éga-*

également éloignés chacun de trois points C, D,E *d'un plan* P , *le rencontre perpendiculairement au point* A *qui est à égale distance de ces trois points* C,D,E. *fig.229.*

Rem. Ce Corollaire fournit d'autres méthodes pour résoudre les deux derniers Problêmes que celles qu'on a expliquées.

Theorême.

La perp: AB *à un plan* P *est oblique à toute autre droite* AG *menée hors du plan par le pied de la perpendiculaire.* 261. *fig.230.*

La ligne *AB* étant perp: au plan *P*, c'est à dire à toute droite menee sur ce plan par le point *A*, il s'ensuit qu'elle l'est à la commune Section *AH* du plan des deux lignes *AB, AG*, & du plan *P* ; par conséquent qu'elle est oblique à la droite *AG*.

Corollaires.

La perp: AB *à un plan* P *est oblique à tout autre plan* R *qu'elle rencontre au même point* A. 262. *fig.231.*

Car suivant ce qu'on vient de voir, elle est oblique à la droite *AG* menée sur le plan *R* dés le point *A* par un point quelconque *G* hors de la commune Section *AH* des deux plans *P, R*.

Une ligne droite AB *ne peut être perp: en un même point* A *qu'à un seul plan* P. 263. *fig.231.*

Si la perp: AB à un plan P *est perp: à une ligne droite* AE *menée par son pied* A, *cette ligne droite* AE *est dans ce plan* P. 264. *fig.232.*

Car ſi la droite *AE* ſortoit du plan *P*, la perp: *AB* au plan *P* ſeroit oblique à cette droite *AE*.

265. *Lorſqu'une ligne droite* AB *qui part du point* A *ou*
*232. *trois autres lignes droites* AC, AD, AE *ſe coupent leur eſt perp:, ces trois lignes* AC, AD, AE *ſont dans le même plan.*

La perp: *AB* aux deux lignes *AC*, *AD* eſt
*248. perp: au plan *P* de ces deux lignes *AC*, *AD**; Donc
*264. la ligne *AB* eſt ſur le plan *P**.

Theorême.

266. *Aiant mené ſur un plan* P *par le pied* A *d'une ligne droite* AB *qui lui ſoit perp:, une autre droite* AC; *ſi*
fig. 233. *on mene ſur ce plan* P *à cette autre droite* AC *une perp.* CE *elle ſera perp. au plan de deux premiéres lignes* AB, AC.

Faites les lignes *AB*, *CE* égales entr'elles; & menez les droites *AE*, *BE*, *BC*.

1°: La ligne *AC* eſt un coté commun aux deux tr: *BAC*, *ECA*; *AB*=*CE*, par la conſtruction, & l'angle *BAC*= l'angle *ECA*, puiſque l'un & l'autre ſont ſupoſés droits : Donc
*41. *BC*=*EA**. 2°. La ligne *BE* eſt un coté commun aux deux tr: *BCE*, *EAB*; *BC*=*EA*, comme on vient de le démontrer; & *CE* = *AB*, par la conſtruction; Donc l'angle *BCE*=l'angle *EAB*. Or l'angle *EAB* eſt droit, puiſque la ligne *AB* eſt perp: au plan *P*; donc l'angle *BCE* eſt droit, ainſi *CE* eſt perp: à *CB*. 3°. Puiſque la ligne *CE* eſt perp: à *CB*, & que par la ſupoſition, elle eſt auſſi perp: à *CA*; il en réſulte
*248. qu'elle eſt perp: au plan de deux lignes *CA*, *CB**, & par la même à celui des deux lignes *AC*, *AB*.

Theo-

Theorême.

Les perp: AB, CD *à une même plan* P, *sont paralleles l'une à l'autre.* 267. fig. 234.

Joignez les points *A, C* par la droite *AC*; & menez du point *C* à un point quelconque *B* de la perp: *AB*, pris hors du plan *P*, la droite *CB*. Du même point *C* menez ensuite sur le plan *P* la perp. *CE*, à la droite *AC*.

1°. La ligne *CE* est perp: à *CA*, par la constr:; à *CB*, par l'article précédent; & à *CD*, puisque *CD* est perp. au plan *P*; Ainsi les trois lignes *CA, CB*, *CD* sont dans le même plan*; c'est à dire que *CD* est dans le plan des deux autres *CA, CB*, Or *AB* est dans le plan des deux mêmes lignes *CA, CB*; Donc les lignes *AB, CD* sont dans le même plan. 2°. Puisque les lignes *AB, CD* sont dans le même plan, & qu'etant perp: au plan *P*, les angles *BAC, DCA* sont droits; il s'ensuit que ces deux lignes *AB, CD* sont paralleles l'une à l'autre*. *265. *92.

Theorême.

Si l'une de deux parallele AB, CD *qui rencontrent un plan* P, *par ex:* AB, *est perp: à ce plan, l'autre* CD *lui est aussi perpendiculaire.* 268. fig. 234.

La construction du Theorême précédent étant suposée, on verra que la ligne *CE* est perp: au plan *BAC**. ou, ce qui est la même chose, au plan *BACD*; d'où l'on conclura que l'angle *DCE* est droit. Or, on supose que les lignes *AB, CD* son paralleles, & que l'angle *BAC* est droit; *266.

*90. droit; donc l'angle *DCA* eſt auſſi droit*, donc
*92. la ligne *DC* eſt perp: au plan *P**.

Theorême.

269. *Deux lignes droites* AB,CD *paralleles à une troiſiéme* EF *ſont paralleles l'une à l'autre, ſoit que les trois lignes* AB, EF,CD *ſoient dans le même plan, ou qu'elles n'y ſoient pas.*
fig.235.

Il faut d'abord remarquer que le premier cas, c'eſt à dire celui ou les lignes *AB, EF, CD* ſont dans le même plan a déja été démon-
94. tré.

Supoſé donc, en ſecond lieu, que ces trois lignes ne ſoient pas dans le même plan, on menera d'un point quelconque *F* de la droite *EF* la perp: *FB* à cette ligne *EF* dans le plan des paralleles *AB, EF,* & la perp: *FD* dans le plan des lignes *CD, EF.* Après quoi on verra que la ligne *EF* étant perp: aux deux lignes *FB, FD,*
248. l'eſt a leur plan, d'ou l'on conclura que les lignes *AB, CD* paralleles à cette perp: *EF* le ſont
268. l'une à l'autre.

Theorême.

270. *Lorſque les jambes* AB, AC *d'un angle* BAC *ſont*
fig.236, *paralleles aux jambes* MN, NP *d'un autre angle*
& 237. NMP, *& qu'elles vont toutes deux, ou du même coté que ces jambes, ou du coté opoſé; le premier angle* BAC *eſt égal au ſecond* NMP, *ſoit que les jambes ſoient dans le même plan que celles de ce dernier, ou qu'elles n'y ſoient pas.*

fig.236. Supoſé, premiérement que les jambes *AB, AC* aillent du même coté que les jambes *MN, MP,*

MP, on fera les lignes *AB*, *MN* égales entr'elles, de même que les lignes *AC*, *MP*, & on menera les droites *BC*, *NP*, *AM*, *CP**.

Cela posé, puisque les deux lignes *AB*, *MN* sont paralleles, par la suposition, & égales par la construction, les deux *BN*, *AM* sont pareillement égales, & de plus paralleles*. Par la même raison, les deux *CP*, *AM* sont égales & paralleles. Donc les deux *BN*, *CP* sont égales, & paralleles*; d'où il suit que les deux *BC*, *NP* sont égales*. Maintenant, puisque les cotés *AB*, *MN* des tr: *BAC*, *NMP*, sont égaux, de même que les cotés *AC*, *MP*, par la construction, & que les cotés *BC*, *NP*. sont aussi égaux, comme on vient de le voir, il s'ensuit que l'angle *EAC* = l'angle *BAD**.

*129. *269. *129, & 126. *43.

Suposé en second lieu que les jambes *AB*, *AC*. au lieu d'aller du même coté que les jambes *MN*, *MP* aillent du coté oposé, on les prolongera l'une & l'autre par leur point de concours *A*; & leurs prolongemens *Af*, *Ag* formeront un angle *fAg* qui sera égal à l'angle *NMP*, par le premier cas. De là & de ce que l'angle *BAC* = l'angle *fAg**, on conclura que l'angle *BAC* = l'angle *NMP*.

*53.

Définition.

271.
fig. 238.

Par l'angle qu'une ligne droite *AB* inclinée à un plan *P* fait avec lui, on entend l'angle *BAC* qu'elle forme avec la droite *AC* menee sur ce plan *P* dès le pied *A* de cette oblique *AB* par le pied *C* de la perp: *BC* abaissée au plan dès un autre point de l'oblique *AB*.

Rem: Ce que j'apelle ici l'angle qu'une ligne droite

droite *AB* inclinée à un plan *P* fait avec lui, les Géometres le nomment ordinairement *l'inclinaison* de cette ligne *AB* au plan *P*.

CHAPITRE II.

Des Surfaces planes considerées par raport à la situation qu'elles peuvent avoir les unes à l'égard des autres.

Theorême.

272. *Soient deux plans* ABCD, AEFD *qui se rencontrent de maniére qu'ils ne fassent pas un même plan.*
fig. 239. *Si de deux points* A, D *de leur commune Section* AD *on mene sur chacun d'eux, du même coté de cette ligne* AD, *deux perp: à la même ligne* AD, *savoir* AB, DC, *&* AE, DF; *les angles* EAB, FDC *qu'elles formeront l'une avec l'autre, seront égaux entr'eux.*

Puisque les angles *BAD, CDA* sont droits, par la supoſition, *AB* est parallele à *DC;* par la même raison, *AE,* est paral: à *DF;* Donc l'angle
*270. *EAB*=l'angle *EDC**.

Définition.

273. Suposé que d'un même point *A* de la com-
fig. 239. mune Section *AB* de deux plans *ABCD, AEFD* qui se rencontrent de la maniére que je viens de

viens de marquer, on mene sur ces plans deux perp: *AB, AE* à cette commune Section *AD*; elles formeront un angle *EAD* qui sera nommé dans la suite l'angle des plans *ABCD, AEFD* sur lesquels on les aura menées.

Définition.

Lorsque l'angle *EAB* que deux plans *ABCD, AEFD* qui se rencontrent de cette maniére, forment ensemble, est droit, on dit de ces plans qu'ils sont *perp:* l'un à l'autre : Lors qu'il est oblique, on dit qu'ils sont *obliques*, ou *inclinés* l'un à l'autre. 274. fig. 239, & 240.

Corollaire.

Un plan AEFD *qui passe par la perp:* AE *à un autre plan* ABCD, *est perp: à cet autre plan.* 275. fig. 240.

Car puisque la ligne *AE* est perp: au plan *ABCD*, c'est à dire à toutes les lignes droites menées sur ce plan par le point *A*, elle est perp: à la droite *AD*, & à la droite *AB*, menée sur le plan *ABCD* perpendiculairement à la droite *AD*.

Theorême.

Soient deux plans ABCD, AEFD *perpendiculaires l'un à l'autre. Si on mene sur l'un des deux une perp:* AE *à leur commune section* AD, *elle sera perpendiculaire à l'autre plan* ABCD. 276. fig. 239.

Aiant mené du point *A*, sur le plan *ABCD*, la perp: *AB* à la droite *AD*, on verra qu'il resulte de la suposition, que la perp: *AE* à la

droite *AD*, eſt auſſi perp: à la dr: *AB*; d'où
*248. l'on conclura qu'elle eſt perp: au plan *ABCD**

Corollaire.

277. *Si d'un point* A *de la commune ſection* AD *de deux plans* ABCD, AEFD *perpendiculaires l'un à l'autre,*
fig. 240 *on mene une perp: à l'un de ces deux plans, par ex: au plan* ABCD, *elle tombera le long de l'autre* AEFD.

C'eſt une ſuite évidente de ce qu'on ne peut mener du point *A* aucune autre perp: au plan *ABCD* que la droite *AE*.

278. *Lorſque deux plans* ABCD, EFGH, *qui ſe coupent ſont perpendiculaires à un même plan* P, *leur com-*
f: 241. *mune ſection* MN *lui eſt perpendiculaire.*

Car la perp: menée du point *M* au plan *P* doit tomber le long des deux plans *ABCD,*
*277. *EFGH**; & la droite *MN* eſt la ſeule ligne qui
241. leur ſoit commune.

Définition.

279. Les plans *M, N* aux quels une même ligne droite *AB* eſt perp: s'apellent des plans *paralle-*
f:242. *les* l'un à l'autre.

Theorême.

280. *Un plan* N *parallele à un autre* M, *eſt tout du mê-*
me coté de cet autre plan M, *& ne le rencontre jamais.*
f:242.

Du point *B* de la perp: *AB* aux deux plans *M, N,* menez ſur le plan *N* une droite quelconque *BD*; & concevez la commune ſection

AC

AC du plan *M* & du plan *DBA*. Cela posé, puisque les angles *B*, *A* sont droits par la sup. *BD*, est parallele à *AC**; ainsi *BD* est toute d'un même coté de *AC*, & ne la rencontre jamais*: Donc le plan *N* a la même proprieté par raport au plan *M*. *92. *80.

Theorême.

Soient deux plans paralleles M, N. *Si on mene de l'un d'eux par ex: du plan* N, *une perp:* DC *à l'autre* M, *elle sera aussi perp: au premier* N. 281. fig. 243.

Suposé toujours que la droite *AB* soit la perp: aux deux plans *M*, *N*. Les lignes *AB*, *CD* perp: au plan *M*, sont paralleles*. Or la premiere *AB* est perp: au plan *N*, de même qu'au plan *M*, par la suposition; donc la seconde *CD* est perp: au plan *N**. *267. *286.

Theorême.

Par un même point D *hors d'un plan* P, *il n'en peut passer qu'un seul qui lui soit parallele.* 282. fig. 243.

On ne peut mener d'un point *D* qu'une perp: *DC* au plan *M**. Or la ligne *DC* doit être perp: au plan qui passe par le point *D* parallelement au plan *M**; & il ne peut passer par le point *D* qu'un seul plan auquel elle soit perpendiculaire*: Donc par un même point &c. *253. *281. *263.

Theorême.

Soient deux plans paralleles M, N. *Les perp:* CD, FG *menées de l'un à l'autre, sont égales entr'elles.* 283. fig. 244.

Tirez les droites *CF*, *DG*. Les lignes *CD*, *FG* perp: chacune à l'un des plans *M*, *N* le sont
281. aux deux. Ainsi ces lignes *CD*, *FG* sont pa-
267. ralleles ; & à cause des angles droits *C*, *D*,
*92. ou *F*, *G*, les lignes *CF*, *DG* le sont aussi *
*126. Donc *CD* = *FG* *.

Theorême.

284. *Trois points* D, G, H, *je le supose, situés du même coté d'un plan* M, *& qui ne sont pas en ligne droite ;*
fig:245. *sont à égale distance de ce plan* M. *Cela posé, je dis que le plan* N *qui passe par ces trois points* D, G, H, *est parallele à ce premier* M.

Aprés avoir mené des points *D*, *G*, *H* les perp: *DC*, *GF*, *HI* au plan *M*, menez encore les droites *CF*, *CI*, *DG*, *DH*.

1°. Les lignes *DC*, *GF* perp: au plan *M*, &
267. par conséquent paralleles l'une à l'autre, sont de plus égales, par la suposition ; ainsi les li-
*129. gnes *DG*, *CF* sont aussi paralleles * ; Or l'angle *DCF* est droit, par la construction ; donc
*88. l'angle *CDG* est pareillement droit*, ou, ce qui revient au meme, *CD* est perp: à *DG*. 2°. Par les mêmes raisons, *CD* est perp: à *DH*.
*248. 3°. Donc *CD* est perp: au plan *N** ; ainsi le plan *N* est parallele au plan *M*.

Theorême.

285. *Lorsque deux lignes droites* DH, DG *qui forment un angle, sont paralleles à deux autres* dh, dg *me-*
f:246. *nées sur un autre plan* M *que celui des deux premieres* DH, DG, *savoir que le plan* N ; *ces deux plans* M, N *sont paralleles entr'eux.*

Menez

Menez du point *D* la perp: *DI* au plan *M*; & du point *I* les paralleles *IK*, *IL* aux droites *DG*, *dh*, & par conséquent aux droites *DG*, *DH**. *269.

La perp: *DI* au plan *M* etant donc perp: aux droites *IK*, *IL*, & par conséquent à leurs paralleles *DG*. *DH**, est perp. au plan *N**; d'où il suit que le plan *N* est paralleles au plan *M*. *90. *248.

Theorême.

286. *Les communes sections* AD, BC *d'un plan* ABCD *& de chacun de deux autres* M, N *paralleles entr'eux sont paralleles l'une à l'autre.* fig: 247.

Des points *B*, *C* menez au plan *M* les perp: *BF*, *CG*; & sur le plan *ABCD* deux droites quelconques *BA*, *CD* paralleles entr'elles. Menez ensuite les droites *AF*, *DG*.

Les cotés *BF*, *CG* des tr: *ABF*, *DCG* rectangles en *F* & en *G*, sont égaux*; & puisque ces cotés *BF*, *CG* sont paralleles entr'eux*, de même que les cotés *BA*, *CD* qui ont été faits tels, les angles *ABF*, *DCG* sont égaux*: Donc ces deux tr: sont égaux en toute le reste*; d'où il suit que les lignes *BA*, *CD* sont égales. Ainsi, puisque ces deux lignes *BA*, *CD* sont de plus paralleles, les deux autres lignes *AD*, *BC* du quadrilatére *ABCD*, sont pareillement paralleles entr'elles*. *283. *267. *270. *119. *129.

Définitions.

287. Un angle rectiligne entre les jambes duquel on

on ſupoſe qu'il y a un plan qui va de l'une à l'autre, ſe nomme un angle *plan*.

288. *fig.* 248. Lorſque pluſieurs angles plans *BAC, CAD, DAB* qui ont le même ſommet *A*, & qui ſe rencontrent le long de leurs cotés de maniére que leurs plans ſe couperoient s'ils étoient prolongés, font le tour d'un eſpace *BCDB;* ils forment une ouverture qu'on appelle un angle *ſolide*.

Theorême.

289. *fig.* 248. *Supoſé que trois angles plans* BAC, CAD, DAB *forment un angle ſolide* A; *la ſomme de deux quelconques, par ex: celle des deux* BAD, DAC *eſt plus grande que le troiſieme* BAC.

Si l'angle *BAC* étoit moindre que l'angle *BAD*, ou qu'il lui fut égal, la propoſition ſeroit bien évidente. Il n' y a donc qu'a la démontrer dans le cas où il eſt plus grand.

Du point *A* menez ſur le plan *BAC* la droite *AE* qui faſſe avec *AB* l'angle *BAE* égal à l'angle *BAD*, & qui ſoit égale a la droite *AD* détérminée à diſcretion. Menez enſuite dés le point *B* pris ſur la droite *AB* à une diſtance quelconque du point *A*, les droites *BD, BEC;* & joignez les points *B, C* par la droite *BC*.

*41. Les tr: *BAD, BAE* ſont entiérement égaux*;
101. ainſi $BD = BE$. Or $BD + DC < BE + EC$;
118. donc $DC > EC$; donc l'angle $DAC > EAC$; donc l'angle *BAD*+l'angle *DAC* <l'angle *BAE* +l'angle *EAC* =l'angle *BAC*.

Théo-

Theorême.

Lorſque les angles plans BAC, CAD, DAE, EAF, FAB *qui forment un angle ſolide* A, *ſe rencontrent enſorte que les angles qu'ils font l'un avec l'autre, ont tous leurs ouvertures tournées vers l'intérieur de cet angle, leur ſomme eſt moindre que celle de quatre droits.* 290. fig. 249.

Soit *BCDEFB* la commune Section des angles plans *BAC, CAD* &c. qui forment l'angle ſolide *A*, & d'un plan qui paſſe par les trois points *B, C, D* pris ſur les droites *AB, AC, AD* à telles diſtances du point *A* qu'on voudra déterminer; & ſoient menées d'un point *H* pris ſur ce dernier plan par tout où l'on voudra au dedans de la commune ſection *BCDEFB*, les droits *HB, HC, HD, HE, HF*.

La ſomme des angles des tr: *ABC, ACD, ADE*, &c. eſt égale à celle des angles des tr: *HBC, HCD, HDE* &c*. Or l'angle *ABF* + l'angle *ABC* > l'angle *FBC**; L'angle *ACB* + l'angle *ACD* > l'angle *BCD*, &c: Donc la ſomme des angles *BAC, CAD, DAE* &c eſt moindre que la ſomme des angles *BHC, CHD, DHE* &c; & par conſéquent que celle de quatre droits*.

*112. *289. *55.

S E-

SECTION II.

Des Solides.

CHAPITRE I.

Des Prismes & des Cylindres.

Définitions.

291. fig. 250. LOrs qu'une ligne droite *Aa* qui rencontre deux plans *M, m,* se meut parallelement à elle même de maniére qu'elle décrit sur ces deux plans deux figures rectilignes *ABCD*, *abcd*; elle décrit plusieurs plans *AB ba*, *BC cb*, &c, qui avec ceux des deux figures rectilignes *ABCD*, *abcd* renferment un solide *P* qu'on apelles *Prisme*.

292. fig. 250. Les plans des deux figures rectilignes *ABCD*, *abcd*, se nomment les plans *oposés & paralleles* du Prisme.

293. fig. 250. Si la ligne droite *Aa* qui décrit les deux figures rectilignes *ABCD*, *abcd* est perp: aux plans *M, m* sur lesquels elle les décrit, le Prisme *P* s'apelle un Prisme *droit* ou *rectangle*; & si elle est oblique, un prisme *inclinée*.

Corollaires.

294. *Les autres plans d'un prisme* P *que les deux oposés, & pa-*

& paralleles ABCD, abcd *par ex: les plans* AB ba, BC cb, *sont des Parallelogrammes.*

Car les lignes *Aa, Bb* ſont paralleles, par la ſupoſition; & les lignes *Ab, ab* communes ſections du plan *AB, ba*, & des plans paralleles *M. m*, ſont auſſi paralleles*. *286.

Les plans opoſés & paralleles ABCD, abcd *d'un priſme* P, *ſont entiérement égaux.* 295. *fig.* 250.

Car *ab*=*AB*. & *bc*=*BC**; & puiſque les lignes *ab, bc* ſont paralleles aux lignes *AB, BC*, comme on vient de le voir, il s'enſuit que les angles *abc, ABC* ſont égaux*. Or il eſt clair que par les mêmes raiſons les autres cotés, & les autres angles de ces deux figures ſont égaux; donc les plans opoſés &c. *126. *270.

Définitions.

Lorſque les plans opoſés & paralleles d'un priſme *P* ſont des triangles, ce priſme s'apelle un priſme *triangulaire*; & lorſque ce ſont des parallelogrammes, il porte le nom de *Parallelpipede.* 296. *f*: 251, & 252.

Theorême.

Les plans opoſés d'un Parallelepipede P, *par ex: les deux* ABba DCcd *ſont paralleles & égaux.* 297. *f*: 252.

Puiſque le quadrilatére *ABCD* eſt un parallelogram: par la ſupoſition, *AB* eſt parallele à *DC*; & puiſque le quadrilatére *ADda* eſt un parallelogr*:, *Aa* eſt parallele à *Dd*: Donc le plan *ABba* eſt parallele au plan *DCcd**. Par les *294. *285.

126. mêmes raiſons $AB = DC$; $Aa = Dd$ & l'an-
270. gle aAB = l'angle dDC : Donc les parallelogrammes $ABba$, $DCcd$ ſont entiérement é-
131. gaux.

Définition.

298. fig.252. Un Parallelepipede P dont deux plans $ABCD$, $ADda$ qui ſe rencontrent ſont des quarrés perpendiculaires l'un à l'autre s'apelle un *Cube*.

Rem: La figure citée ne repréſente qu'un Parallelepipede en général.

Theorême.

299. f: 253. *Tous les plans d'un Cube ſont des quarrés égaux; & ceux de ces plans qui ſe rencontrent, ſont perp: l'un à l'autre.*

La premiére partie de ce Theorême eſt une ſuite évidente de l'article 297, & la ſeconde réſulte de l'article 248.

Définition.

300. fig.252. La perp: fF menée de l'un des deux plans opoſés & paralleles d'un Priſme P, par ex: du plan $abcd$, à l'autre plan $ABCD$, eſt la *Hauteur* de ce priſme; & cet autre plan $ABCD$ en eſt la *Baze*.

Theorême.

301. *Lorſque lee bazes* abcd, ABCD *de parallelepipe-*

des

des p, P *sont entiérement égales, & que les hauteurs sont aussi égales, ces parallelepipedes sont égaux en solidité.* fig. 253, 254, & 255.

Suposé que le parallelep: *p* soit mis dans le parallelep: *P* en sorte que la baze *abcd* couvre la baze *ABCD*, le plan *fghi* se couchera le long du plan *FGHI* prolongé indéfiniment de tous cotés, puisque les hauteurs de ces deux solides sont égales; & le plan *dchi* se couchera le long du plan *DCHI* prolongé indéfiniment entre les plans *ABCD*, *FGHI*, fig: 254, ou il s'écartera de ce plan, fig: 255; c'est à dire que le parallelep: *p* aura l'une des deux situations *ABCD fghi* représentées dans ces figures.

Cela posé, dans le premier cas, fig: 254, les solides terminés de deux cotés, l'une par les tr: *FAf*, *IDi*; l'autre par les tr: *GBg*, *HCh*, sont évidemment des prismes triangulaires entiérement égaux; d'où il suit, en ajoutant à l'un & à l'autre, le solide *ABCDifGH*, que les parallelepipede *ABCDFGHI*, *ABCDfghi* sont égaux.

Dans le second cas, fig: 255, il faut suposer la construction qu'on voit dans la figure. Après quoi on considérera que le parallelepipede *ABCDFGHI* est égal au parallelep: *ABCDklnm*, par le premier cas; & que par le même cas, le parallelep: *ABCDklnm* est égal au parallelep: *ABCDfghi*: D'ou l'on conclura que le parallelepip: *ABCDEFGHI* est égal au parallelep: *ABCDfghi*.

Définition.

302. Le Cube *P* de la ligne *mn* priſe pour l'unité
*fig.*256. des lignes, eſt *l'unité* des Solides.

Theorême.

303. *Le produit de la baze* ABCD *d'un parallelep: P, multipliée par la hauteur* FA, *figur:* 257, *ou* FM, *fig:* 258 *&* 259, *exprime la ſolidité de ce parallelepipede.*
*fig.*257, 258, & 259.

fig: 257, & 258. Supoſé 1°. que le Parallelogramme *ABCD* ſoit rectangle, le Theorême n'a aucune difficulté.

*f:*259. Supoſé 2°. qu'il ſoit incliné, on imaginera le parallelep: *ABcdFGhi* dont la baze eſt le rectangle *ABcd*, & dont l'un des autres plans eſt le parallelogramme *ABGF*. Aprés quoi on verra facilement que les ſolides *AdDFiI*, *BcCGbH* ſont des priſmes triangulaires entiérement égaux; par conſéquent que le parallelep: *ABCDFGHI*, eſt égal au parallelep: *ABcdFGhi* & qu'ainſi ce cas ſe réduit au premier.

Corollaires.

304. *Si on multiplie la baze* ABD *d'un priſme triangulaire* P *par la hauteur* FM *on aura au produit la ſolidité de ce priſme.*
fig: 260.

305. *Si on multiplie la baze* ABCD *d'un priſme quelconque* P *par la hauteur* FM *on aura donc au produit la ſolidité de ce priſme.*
fig. 261.

Dé-

Définitions.

Suposé qu'une ligne droite *Aa* qui rencontre deux plans paralleles *M*, *m*, se meuve parallelement à elle même de maniére qu'elle décrive sur ces plans deux figures *ABCA*, *abca*, dont l'une soit un cercle; elle décrira une surface courbe qui avec les plans de ces deux figures *ABCA*, *abca*, terminera un *Cylindre P*. 306. fig. 262.

Les plans des deux figures *ABCA*, *abca* dont l'une est un cercle seront nommés simplement les *Plans paralleles* du Cylindre *P*. 307. fig. 262.

Lorsque la ligne droite *Aa* qui décrit les deux figures *ABCA*, *abca* dont je viens de parler, est perp: aux plans *M*, *m* sur lesquels elle les décrit, Cylindre *P* se nomme un cylindre *droit*; & si elle est oblique, un Cylindre *incliné*. 308. fig. 262.

Theorême.

Les plans paralleles ABCA, abca *d'un Cylindre* P *sont des cercles égaux*. 309. fig. 262.

Soit menée du centre *F* du cercle *ABCA* la parallele *Ff* à la droite mobile & toujours parallele a elle même *Aa*; & du point fixe *f* au point mobile *a* la droite *fa*.

Les droites *Aa*, *Ff* sont paralleles par la construction; & les droites *AF*, *af* communes Sections du plan *AFfa* & des plans paralleles *M*, *m* sont aussi paralleles*: Ainsi *af*==*AF**. Donc la figure *abca* est un cercle de même que la figure *ABCA*; & ces deux cercles sont égaux. *286. *126.

Défi-

Définitions.

310. La droite *Ff* qui joint les centres *f*, *F* des
fig. 262. deux plans paralleles *ABCA*, *abca* d'un Cylindre *P*, se nomme *l'axe* de ce Cylindre.

311. La perp: *gG* menée de l'un des deux plans
fig. 263. paralleles d'un Cylindre *P*, par ex: du plan *abca*, à l'autre plan *ABCA*, est la *Hauteur* du Cylindre ; & cet autre plan *ABCA* en est la *baze*.

Theorême.

312. *Le produit de la baze* ABCDEFA *d'un Cylindre*
fig. 264. P, *multipliée par la hauteur, exprime la solidité du Cylindre.*

Il n'y a qu'a voir la figure pour comprendre que le Cylindre *P* peut être consideré comme un Prisme, & pour en tirer le Theorême en question.

CHAPITRE II.

Des Pyramides, des Cones, & des Sphéres.

Définitions.

313. APrés avoir arrêté en un point fixe *G* éle-
fig. 265. vé audessus d'une figure plane rectiligne *ABCDE*,

ABCDE, l'extremité *G* d'une droite indéfinie *GA;* si on fait tourner cette ligne sur ce point de maniére que parcourant les cotés *AB*, *BC* &c de la figure, elle fasse un tour entier, elle décrira par sa partie comprise entre ce point *G* & ces cotés *AB*, *BC* &c plusieurs triangles *GAB*, *GBC* &c; qui avec la figure rectiligne *ABCDE* termineront un solide *P* qu'on apelle une *Pyramide*.

Le point fixe *G* élevé au dessus de la figure rectiligne *ABCDE*, & sur lequel la droite mobile *GA* tourne autour de cette figure, est le *Sommet* de la Pyramide *P*. 314. *fig.* 265.

Cette même figure *ABCDE* en est la *Baze*. 315. *fig.* 265.

La perp: *GH* menée du sommet *G* à la baze *ABCDE*, en est la *Hauteur*. 316. *fig.* 265.

Lorsque la baze d'une Pyramide est un triangle, la Pyramide est dite *triangulaire*. 317. *fig.* 265.

Theorême.

Si on coupe une Pyramide GABCDE *par un plan* abcde *parallele à la baze* ABCDE, 1°. *la Section* abcde *sera semblable à la baze* ABCDE 2°. *Elle aura le même raport a cette baze que le quarré de la partie* Gh *de la hauteur* GH, *comprise entre le sommet* G, *&* *le plan de la Section* abcde, *aura au quarré de la hauteur* GH. 318. *fig.* 266.

1°. Puisque les lignes *ab*, *bc* sont paralleles aux lignes *AB*, *BC**, l'angle *abc* = l'angle *ABC**: *286.
De plus *ab*. *AB* : : *Gb*. *GB*, & *bc*. *BC* : : *Gb*. *GB**; *270.
d'ou il suit que *ab*. *AB* : : *bc*, *BC*. On achevera *202.
de

de la même maniére d'établir la premiére partie de ce Theorême.

2°. Soient menées, pour démontrer la seconde, les droites *HD*, *hd*, qui seront paralleles
286. l'une à l'autre. Cela posé on aura *Gh*, $\overline{GH}$: : *Gd*,
*202. *GD** : : *cd*, *CD* ; & par conséquent, $\overline{Gh}^2$ $\overline{GH}^2$
: : $\overline{cd}^2$ $\overline{CD}^2$. Or le polygone *abcde*. polygone
*234. *ABCDE* : : $\overline{cd}^2$ $\overline{CD}^2$*. Donc, le polyg:*abcde*, polyg: *ABCDE* : : $\overline{Gh}^2$ $\overline{GH}^2$

Corollaire.

319. *Suposé que les bazes* ABCDE, LMN *de deux pyramides, soient égales en surface, & que les hau-*
fig. 266, *teurs* GH, OP *soient aussi égales entr'elles : si on cou-*
& 267. *pe ces pyramides par des plans* abcde, lmn *paralleles aux bazes, & à égale distance des sommets*, O, *les Sections* abcde lmn *seront égales en surface*,

Démande.

320. *Suposé qu'une Pyramide* DABC *soit coupée par deux plans* abc, fgh *paralleles à la baze* ABC, *&*
fig. 268. *infiniment proches l'un de l'autre : la partie de la Pyramide, comprise entre les deux Sections* abc, fgh, *peut être considerée comme un prisme, dont ces deux Sections* abc, fgh *sont les plans oposés & paralleles*.

Theorême.

321. *Lorsque les bazes* ABC, LMN *de deux pyramides* DABC, OLMN *sont égales en surface, & que*
fig. 268, *les hauteurs* DK, OV *sont pareillement égales entr'el-*
& 269. *les : ces pyramides sont égales en solidité*.

Il n'y a pour en avoir la raison, qu'a suposer que

que les hauteurs *DK*, *OV* ſoient diviſées en un même nombre indéfiniment grand de parties égales entr'elles, & que par tous les points de diviſion il paſſe des plans, tels que *abc*, *fgh*, *lmn*, *pqr*, paralleles aux bazes *ABC*, *LMN*, plans par leſquels les pyramides ſeront diviſées en un même nombre de Solides indéfiniment petits, qui pourront être pris pour des priſmes*. *320.

On démontrera ſans peine que les priſmes *abcfgh*, *lmnpqr* termines par les plans également éloignés des ſommets *D*, *O* ſont égaux en ſolidité*. D'où l'on conclura que les Pyramides *DABC*, *OLMN*, ſont égales à cet égard. *319, & 304.

Theorême.

Si on multiplie la baze ABC *d'une pyramide triangulaire* DABC *par la hauteur* DA, *& qu'on prene le tiers du produit, on aura la ſolidité de la pyramide.* 322. fig. 270.

Imaginez le priſme *ABCDFG* & la droite *CF*. Il eſt clair* que pour démontrer le Theorême dont il s'agit il n'y a qu'a faire voir que les pyramides triangulaires *DABC*, *CDFG*, *CDBF*, ſont égales en ſolidité. *304.

1°. Les bazes *ABC*, *DFG* des deux premiéres pyramides *DABC*, *CDFG* ſont égales*; & puiſqu'elles ſont paralleles, par la ſup:, les hauteurs des deux pyramides ſont auſſi égales: Donc ces deux pyramides ſont égales en ſolidité*. *295. *321.

2°. Si on conſidére les tr: *DAB*, *DBF* comme les bazes des pyramides *CDAB*, *CDBF*, c'eſt

à dire de la premiére & de la troisiéme, on verra que ces tr: étant égaux*, & les deux pyramid: aiant le même sommet *C*, & par conséquent la même hauteur, elles sont encore égales en solidité*. D'où l'on tirera l'égalité qu'il falloit démontrer.

*125.

*321.

Corollaire.

323. fig.271. *Si on multiplie la baze* ABCDE *d'une pyramide quelconque* GABCDE, *par la hauteur* GH, *& qu'on prene le tiers du produit, on aura la solidité de la pyramide.*

Définitions.

324. fig.272. Soit un point fixe *G* élevé au dessus du plan d'un Cercle *ABCDEF*, si aprés avoir arrêté en ce point *G* l'extremité d'une ligne droite indéfinie *GA*, on fait tourner cette ligne sur ce point *G* de maniére que parcourant la circonf: du Cercle, elle fasse un tour entier, elle décrira une surface courbe qui avec le plan du Cercle terminera un solide qu'on apelle *Cone*.

325. fig.272. Le point fixe *G* élevé au dessus du plan du Cercle *ABCDEF* est le *Sommet* du Cone.

326. fig.272. Le Cercle *ABCDEF* en est la *Baze*.

327. fig.272. La perp: *GH* menée du sommet *G* à la baze *ABCDEF* en est la *Hauteur*.

328. fig.272. La droite *GO* menée du sommet *G* au centre *O* de la baze, est l'*Axe* du Cone.

329. Lorsque l'Axe *GO* est perpendiculaire à la baze,

baze, le Cone eſt dit *droit;* lors qu'il eſt obli- *fig.*272.
que, il eſt dit *incliné.*

Theorême.

Si on multiplie la baze ABCDEF *d'un Cone par la* 330.
hauteur GH, *& qu'on prene le tiers du produit, on* *fig.*273.
aura la ſolidité du Cone,

On n'a pour s'en convaincre qu'a voir la figure, & rapeller le dernier Corollaire.

Définitions.

Le ſolide *ABCDA* décrit par la révolution 331.
entiére d'un demi cercle *ABC* autour du Dia- *f:* 274.
metre *AC* qui lui ſert de baze porte le nom de *Sphére.*

Le centre *O* du demi cercle *ABC* eſt celui de 332.
la Sphére.

Les lignes droites *OB*, *OD* menées du cen- 333.
tre *O* à la ſurface en ſont les *Raïons.*

Les lignes droites *AC, BD* menées par le 334.
centre *O* & terminées de part & d'autre à la ſur- *fig.*274.
face, en ſont les *Diamétres.*

Corollaires.

Tous les raïons OA, OB *&c d'une Sphére ſont é-* 335.
gaux entr'eux. *fig.*274.

Tous les Diamétres AC, BD *d'une Sphére ſont é-* 336.
gaux chacun à deux raïons de la même Sphére, & par *fig.*274.
conſéquent, ils ſont égaux entr'eux.

Theorême.

337. *Après avoir multipliés la ſurface d'une Sphére* ABCD
par le raïon OA, *ſi on prend le tiers du produit, on au-*
*fig.*274. *ra la ſolidité de la Sphére.*

La Sphére *ABCD* peut être conſiderée comme l'aſſemblage d'une infinité de Cones infiniment petits qui ont leurs ſommets au point *O*, & dont les bazes forment la ſurface de cette même Sphére. Donc après avoir multi-
330. plié &c.

CHAPITRE III.

Des Solides ſemblables.

Lemme.

338. *Lorſque trois angles plans* bac, cad, bad, *qui for-*
*fig.*275, *ment un angle ſolide* a, *pris un à un, ſont égaux*
& 276, *à trois angles plans* BAC, CAD, BAD *qui forment*
un autre angle Solide A; *ces angles Solides* a, A *ſont*
égaux.

Faites à diſcretion les lignes *ac*, *AC* égales entr'elles, & des points *c*, *C* menez à ces lignes les perp: *cb*, *cd*, *CB*, *CD*, Menez enſuite les droites *bd*, *BD* . . .

*119. 1°. Le tr: *bac*=tr: *BAC**; ainſi *ab*=*AB*,
*119. & *cb*=*CB*. Pareillement le tr: *cad*=tr: *CAD**;
d'où il ſuit que *ad*=*AD*, & que *cd*=*CD*. Or
puiſque *ab*=*AB*, que *ad*=*AD*, & que par la
ſup:

ſup: l'angle *bad* = l'angle *BAD*, il s'enſuit que *bd* = *BD**. *42.

2°. Maintenant, les lignes *ac*, *AC* étant perp: aux plans *bad*, *BAD**, il en réſulte que ſi on met l'angle ſolide *a* dans l'angle ſolide *A* de * 248. maniére que le tr: *acb* couvre le tr: *ACB*, il en réſulte, disje, que le plan *bcd* ſe couchera le * 263. long du plan *BCD**; par conſéquent que le tr: *bcd* dont les trois cotés ſont égaux à ceux du tr: *BCD*, couvrira ce dernier tr: *BCD**; & par la *43. même que l'angle *a* = l'angle *A*.

Corollaire.

Les mêmes choſes étant encore ſupoſées, je dis que angles baf, BAF *formés par les cotés correſpondans* ab, AB *des deux angles ſolides* a, A, *avec les plans* cad, CAD *que ces cotés rencontrent, ſont égaux entr'eux.* 339. fig. 277, & 278.

Définition.

Les ſolides *badc*, *BADC* terminés par des plans, ſont dits *ſemblables*, lorſque tous les plans de l'un, ſont ſemblables à ceux de l'autre, & ſemblablement poſés. 340. fig. 279. & 280.

Theorême.

Supoſé que deux pyramides triangulaires badc BADC *ſoient ſemblables, la premiére eſt à la ſeconde en raiſon triplée d'un coté quelconque* ad *de la premiére au coté homologue* AD *de la ſeconde.* 341. fig. 279. & 280.

Soient menées des points *b*, *B* les perp: *bf*, *BF* aux tr: *adc*, *ADC*; & des points *a*, *A* les droi-

droites *af*, *AF* aux points *f*, *F*.

La raison de la pyramide *badc*, à la pyramide *BADC* est composée de la raison de la baze *adc*, à la baze *ADC*, & de celle de la hauteur
*322. *bf* à la hauteur *BF**. Or la raison de la baze *adc* à la baze *ADC* est doublée de celle du co-
*234. té *ad*, au coté *AD**; & puisque les tr: rectan-
*339. gle *af*, *BAF* sont équiangles*, la raison de la hauteur *bf* à la hauteur *BF* est égale à celle
*202. du coté *ab* au coté *AB** qui est égale à celle du coté *ad* au coté *AD*: Donc la raison de la pyramide *badc* à la pyramide *BADC* est triplée de celle du coté *ad*, au coté *AD*.

Rem. On peut tirer de ce Theorême un grand nombre de conséquences aux quelles je ne m'arreterai pas.

FIN.



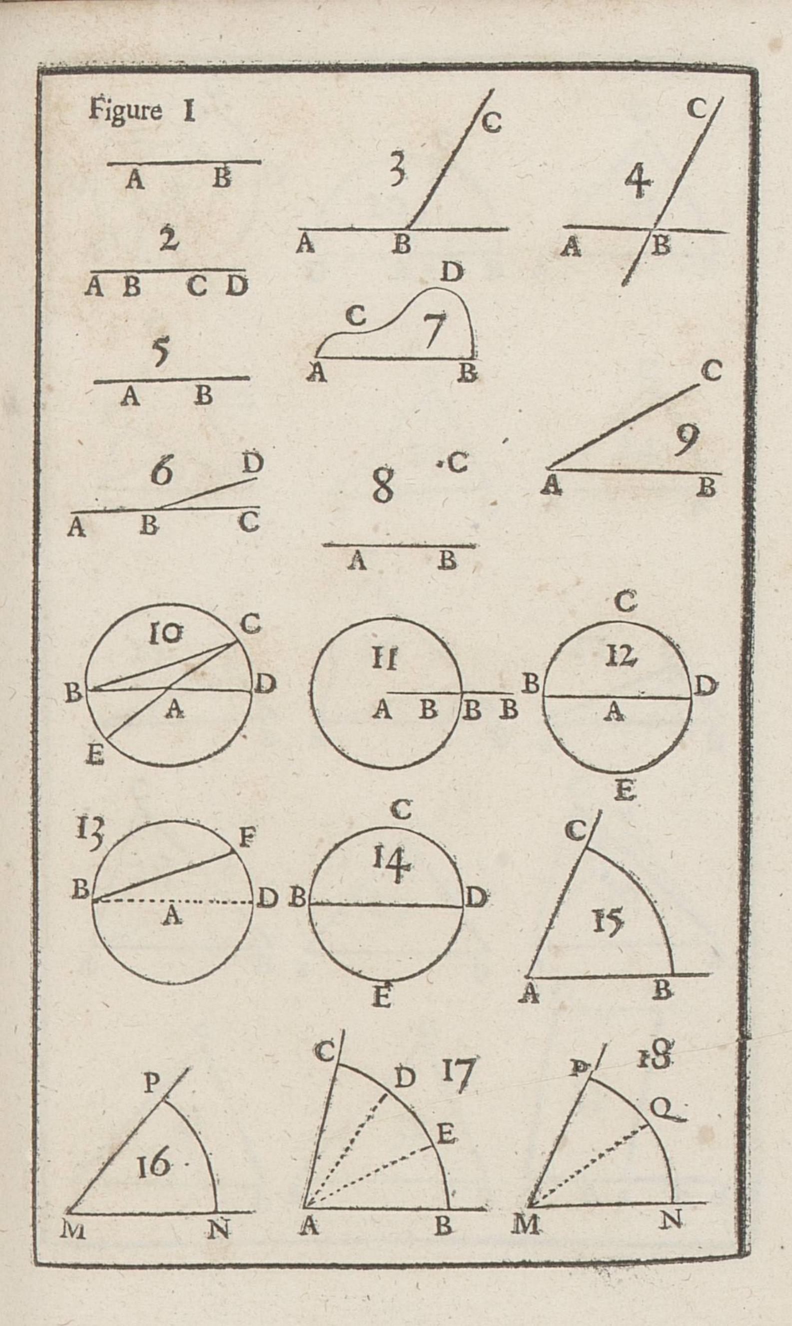
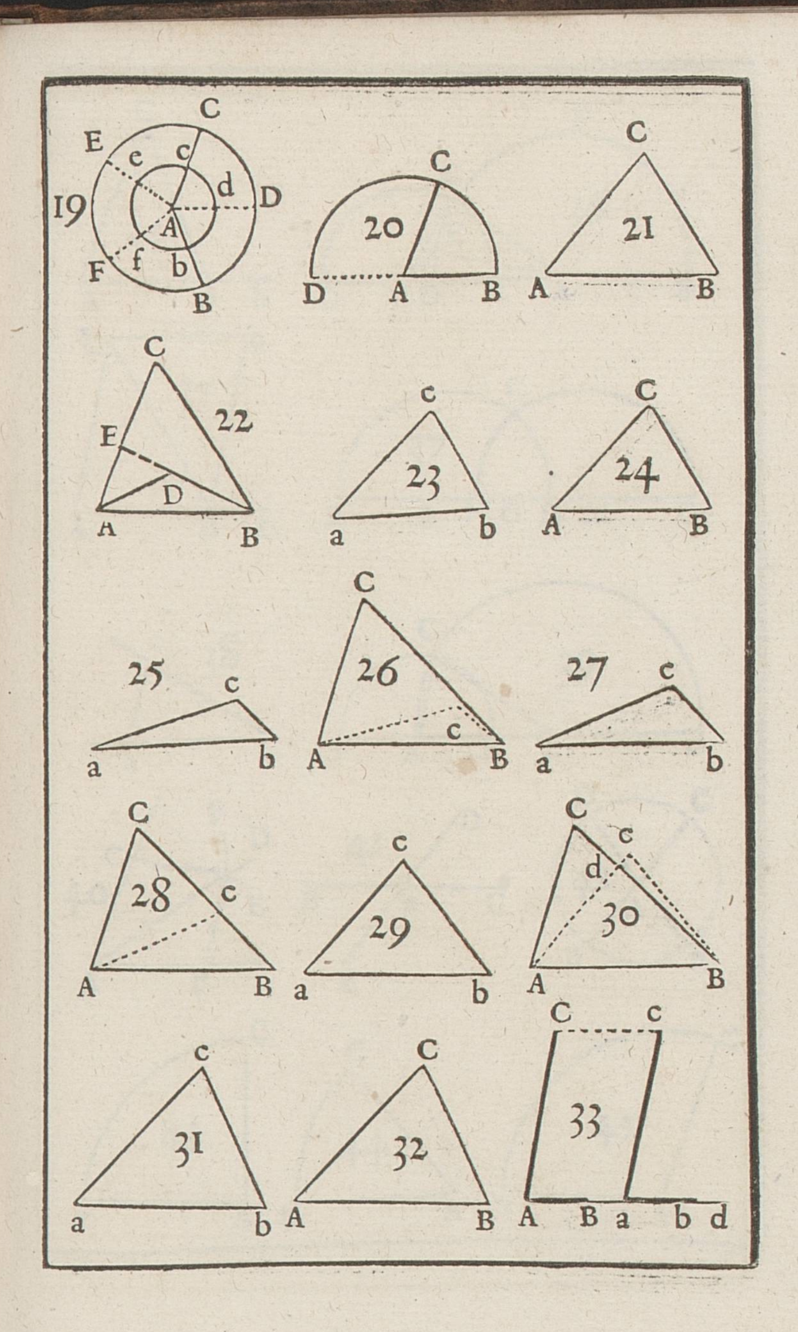
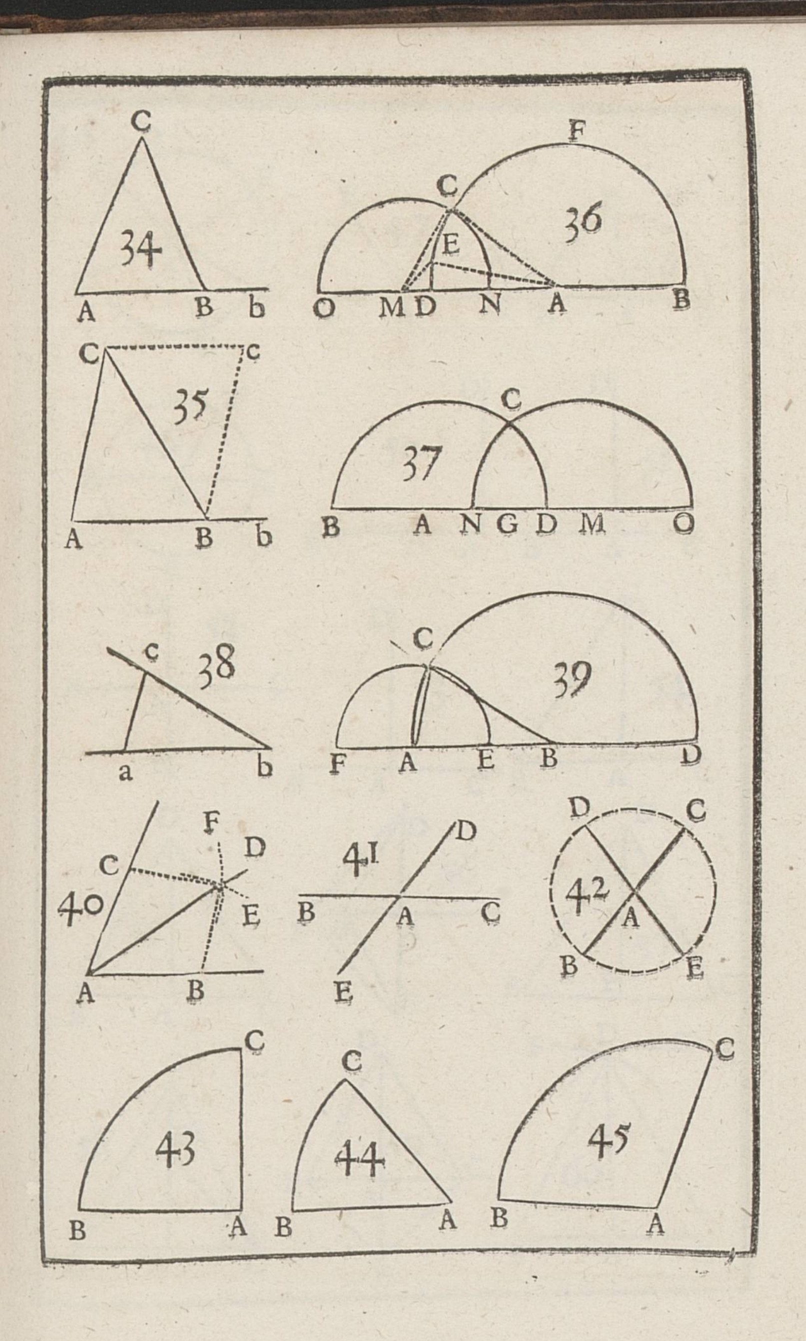
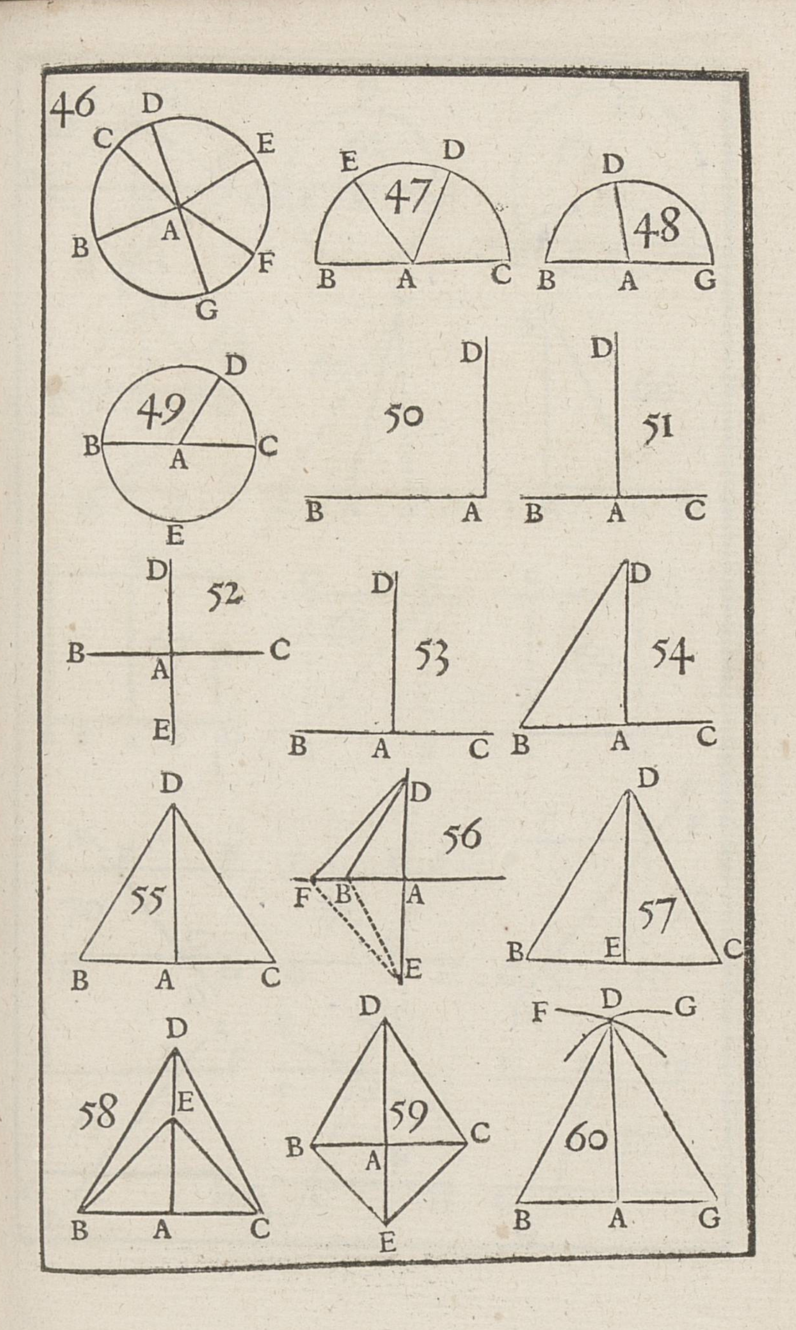


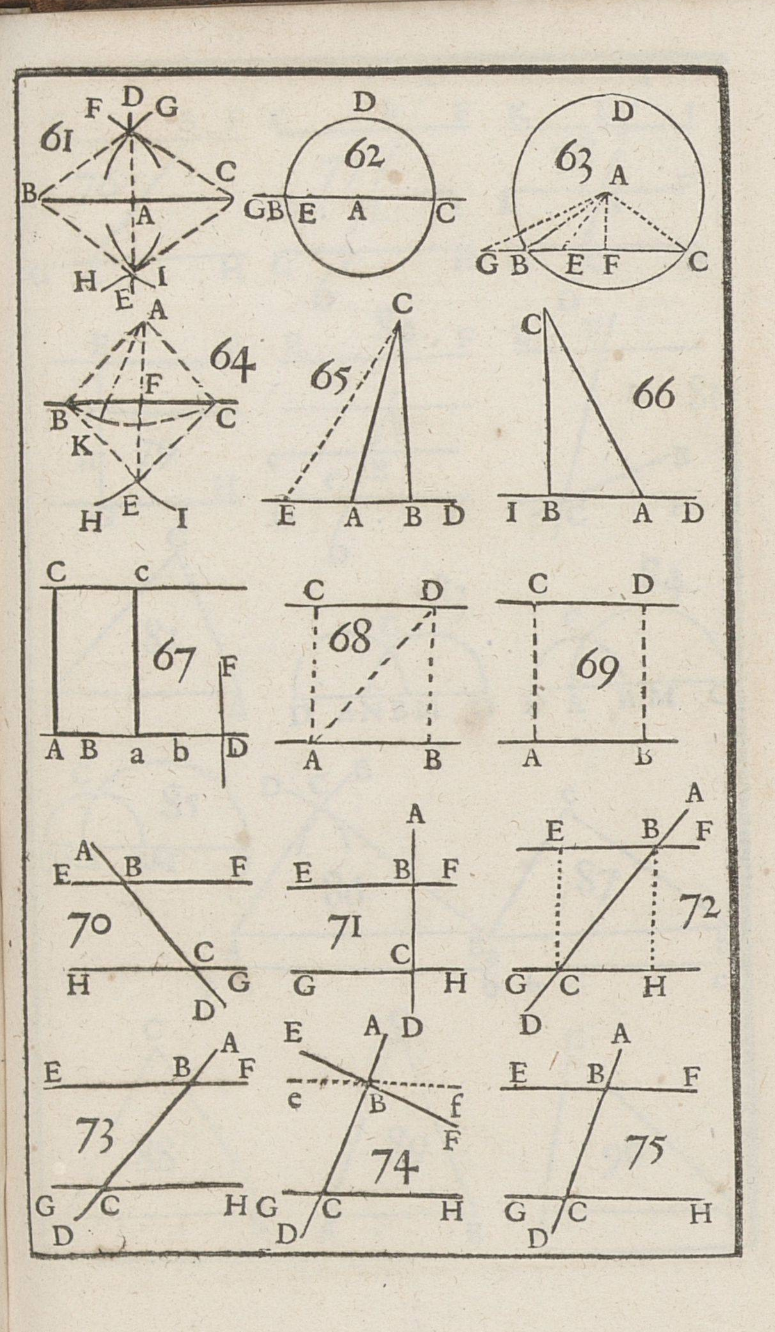
Figure I
A B
2
A B C D
3
A B C
4
A B C
5
A B
6
A B C D
7
A B C D
8
A B C
9
A B C
10
B C D A E
11
A B B B
12
B C D A E
13
B F D A
14
B C D E
15
A B C
16
M N P
17
A B C D E
18
M N P Q


C
E
e
c
d
19
D
A
F
f
b
B
C
20
D
A
B
C
21
A
B
C
22
E
D
A
B
c
23
a
b
C
24
A
B
25
c
a
b
C
26
c
A
B
27
c
a
b
C
28
c
A
B
c
29
a
b
C
c
d
30
A
B
C
c
c
31
a
b
C
32
A
B
33
A
B
a
b
d

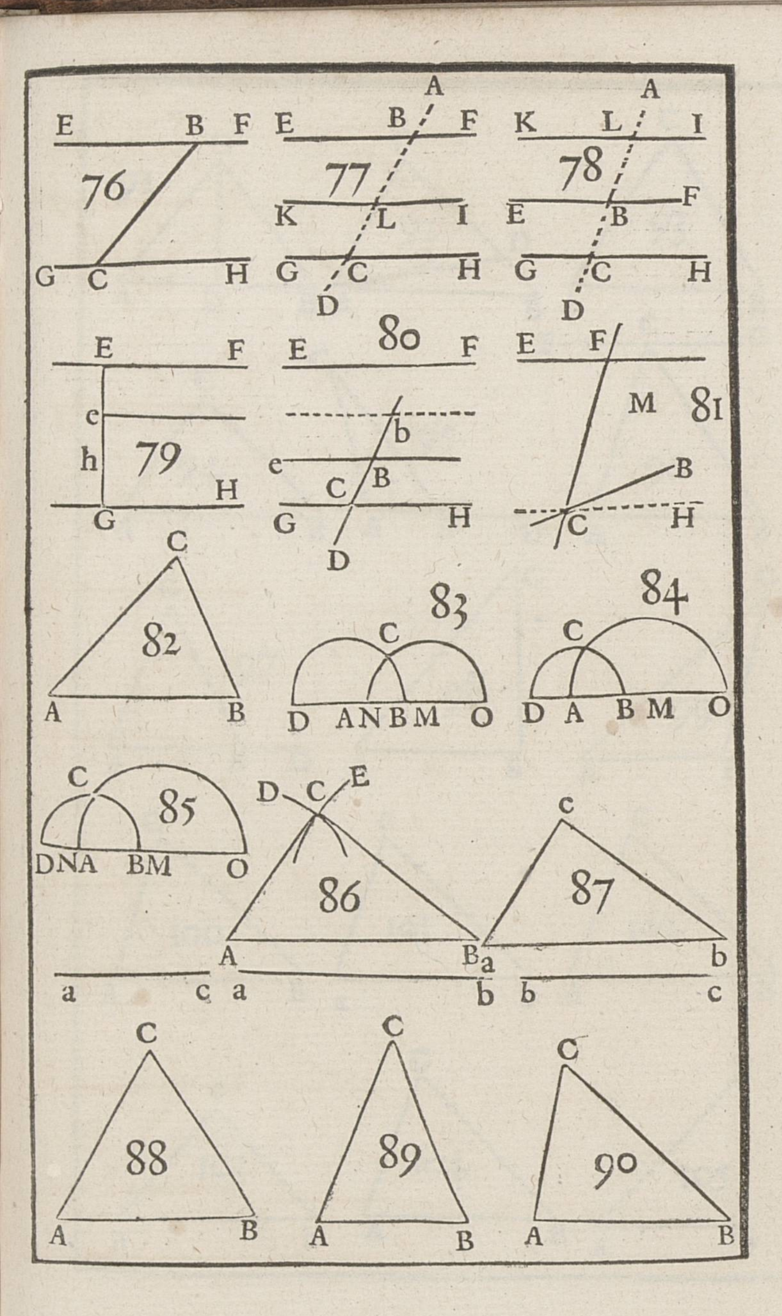


C
34
A B b
F
C
36
E
O M D N A B
C c
35
A B b
C
37
B A N G D M O
c 38
a b
C
39
F A E B D
F
D
C
40
E
A B
41 D
B A C
E
D C
42
A
B E
C
43
B A
C
44
B A
C
45
B A

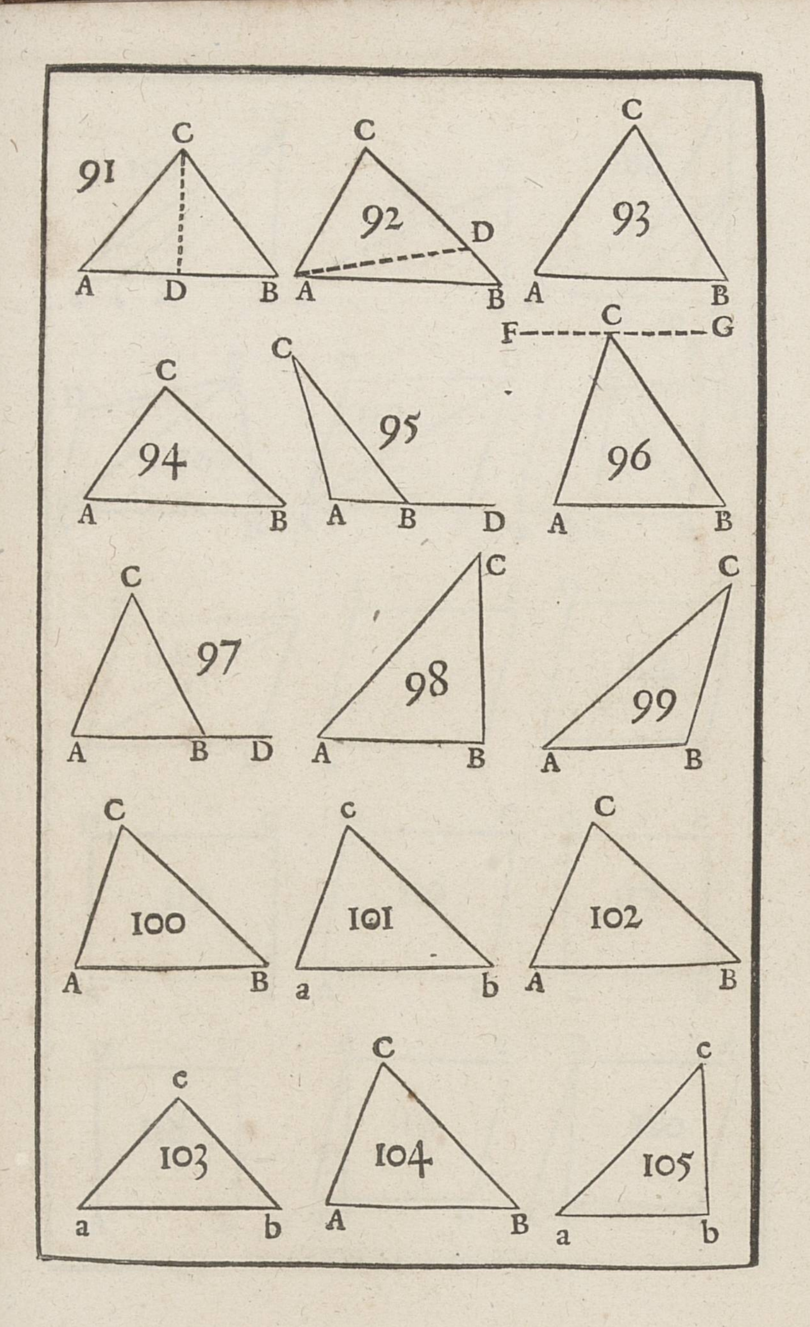

46
D
C
E
A
B
F
G
47
E
D
B
A
C
48
D
B
A
G
49
D
B
A
C
E
50
D
B
A
51
D
B
A
C
52
D
B
A
C
E
53
D
B
A
C
54
D
B
A
C
55
D
B
A
C
56
D
F
B
A
E
57
D
B
E
C
58
D
E
B
A
C
59
D
B
A
C
E
60
F
D
G
B
A
G



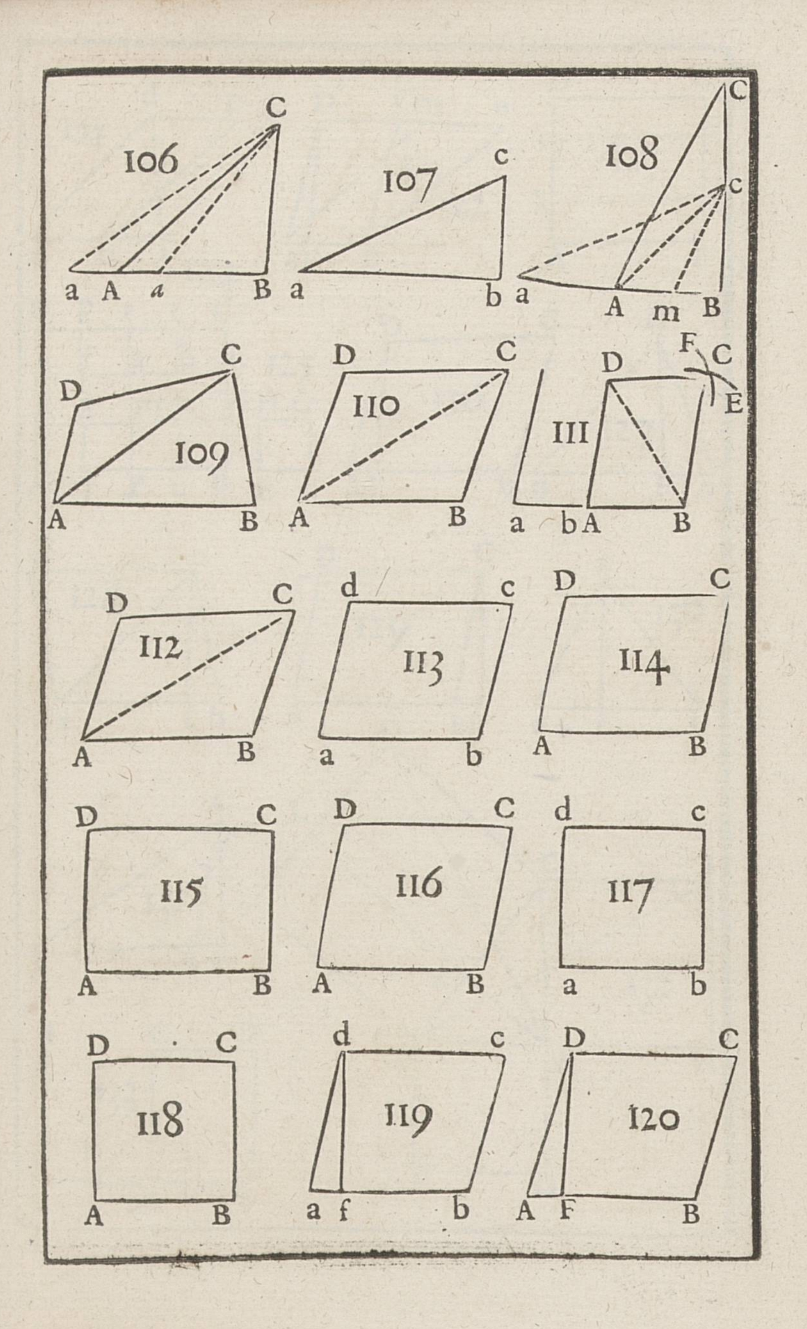
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75



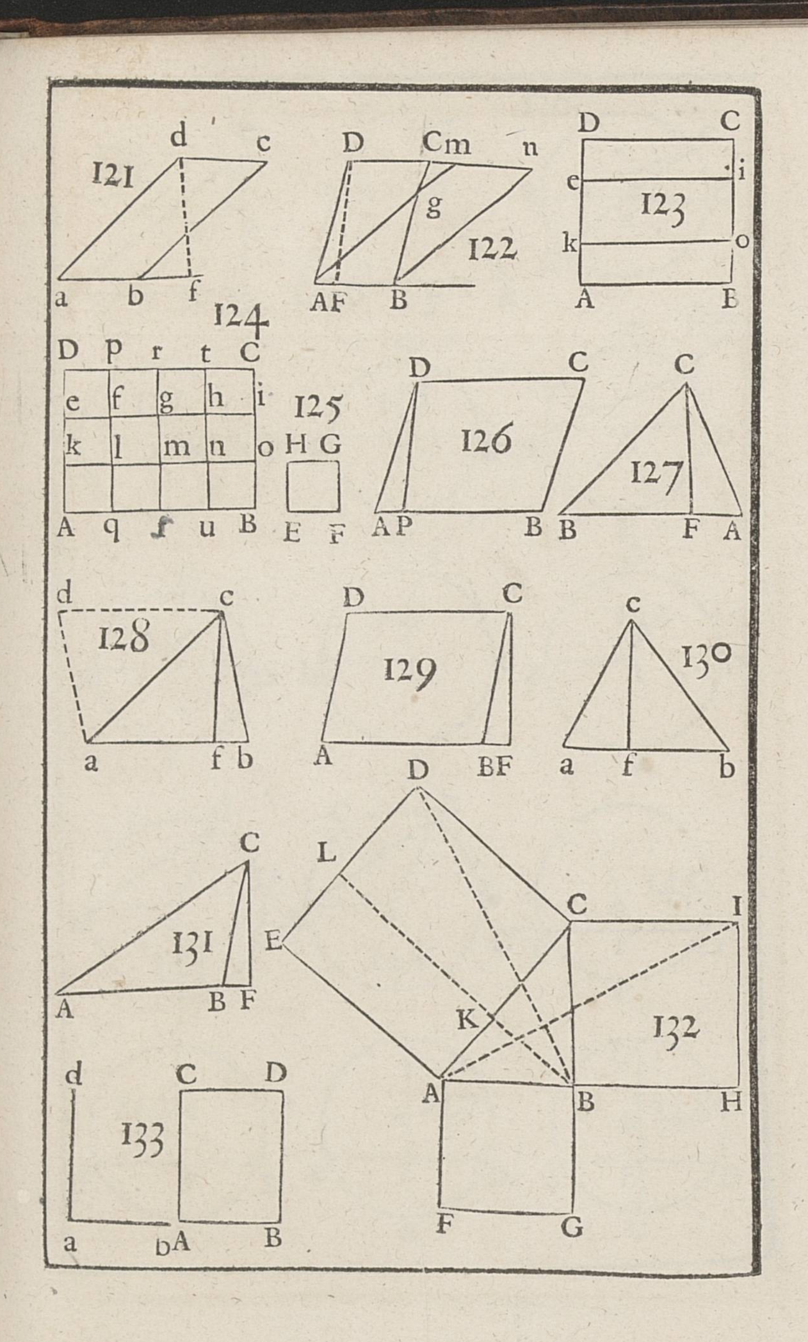
E B F
76
G C H
A
E B F
77
K L I
G C H
D
A
K L I
78
E B F
G C H
D
E F
e
h 79
H
G
80
E F
b
e
C B
G H
D
E F
M 81
B
C H
C
82
A B
83
C
D ANBM O
84
C
D A BM O
C
85
DNA BM O
D C E
86
A B
c
87
a b
a c
a b
b c
C
88
A B
C
89
A B
C
90
A B

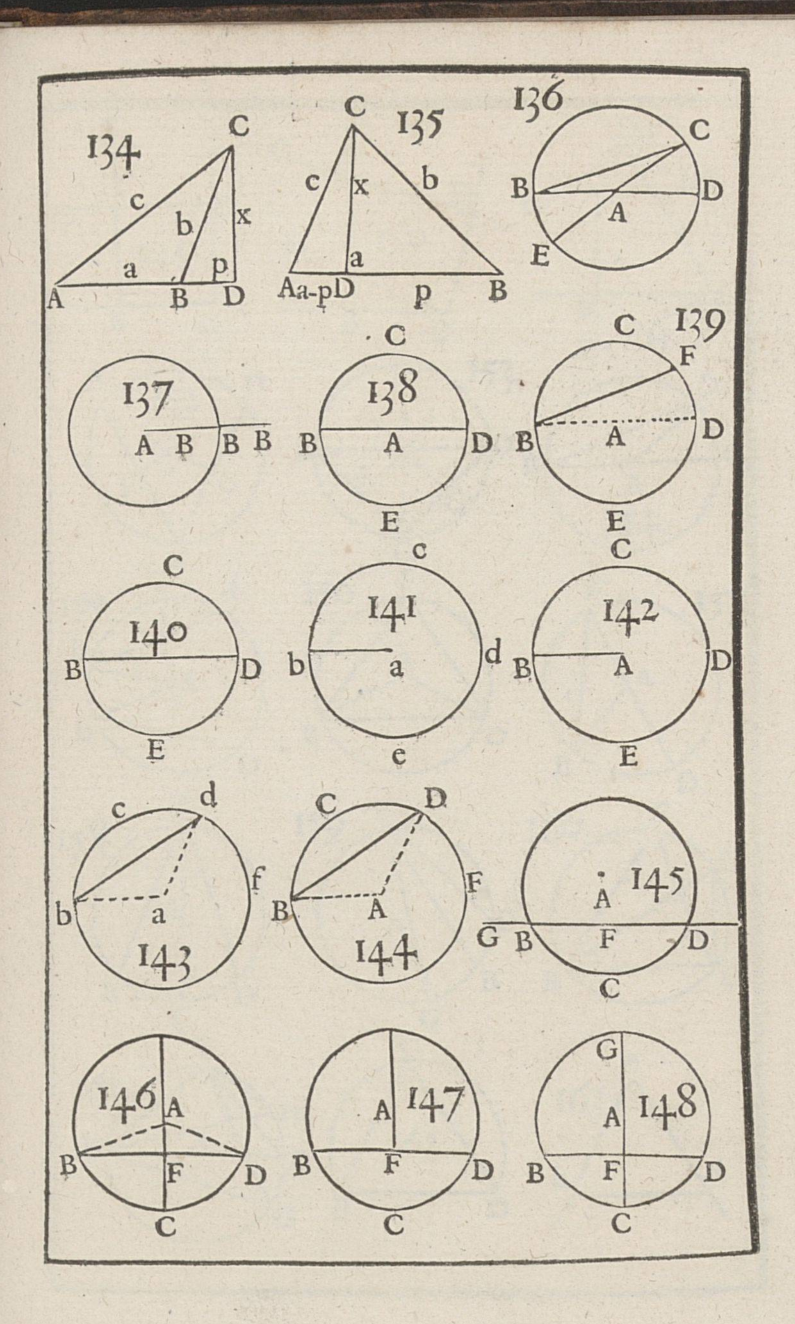


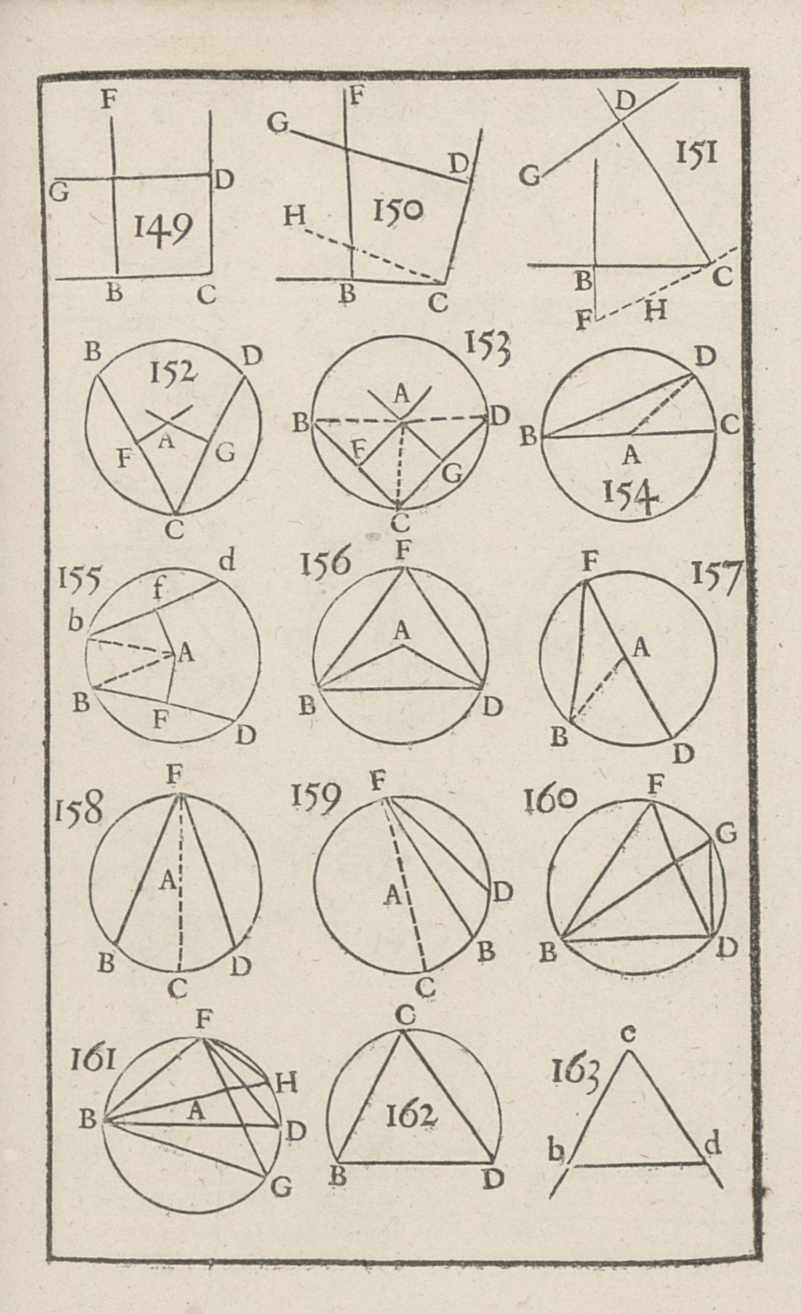
91
C
A
D
B
92
C
D
A
B
93
C
A
B
F
C
G
94
C
A
B
95
C
A
B
D
96
A
B
97
C
A
B
D
98
C
A
B
99
C
A
B
100
C
A
B
101
c
a
b
102
C
A
B
103
c
a
b
104
C
A
B
105
c
a
b

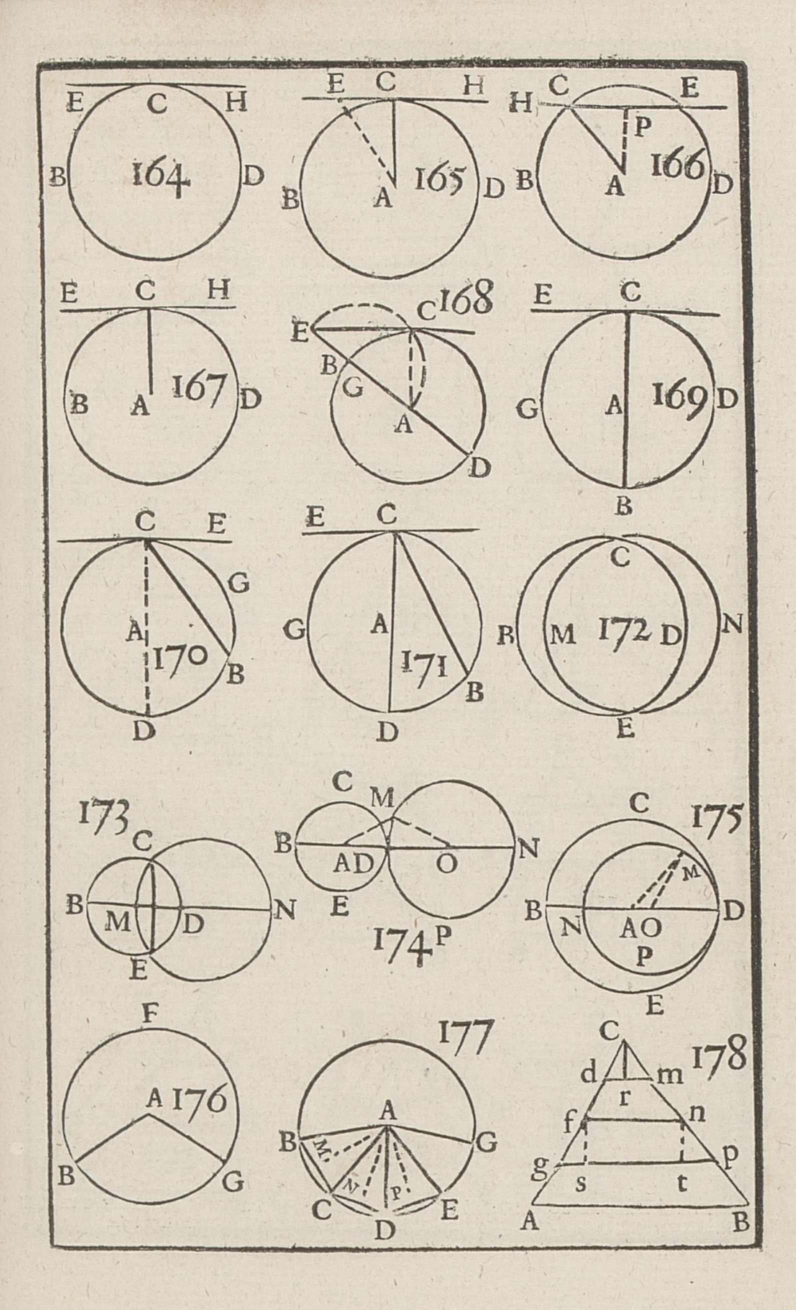


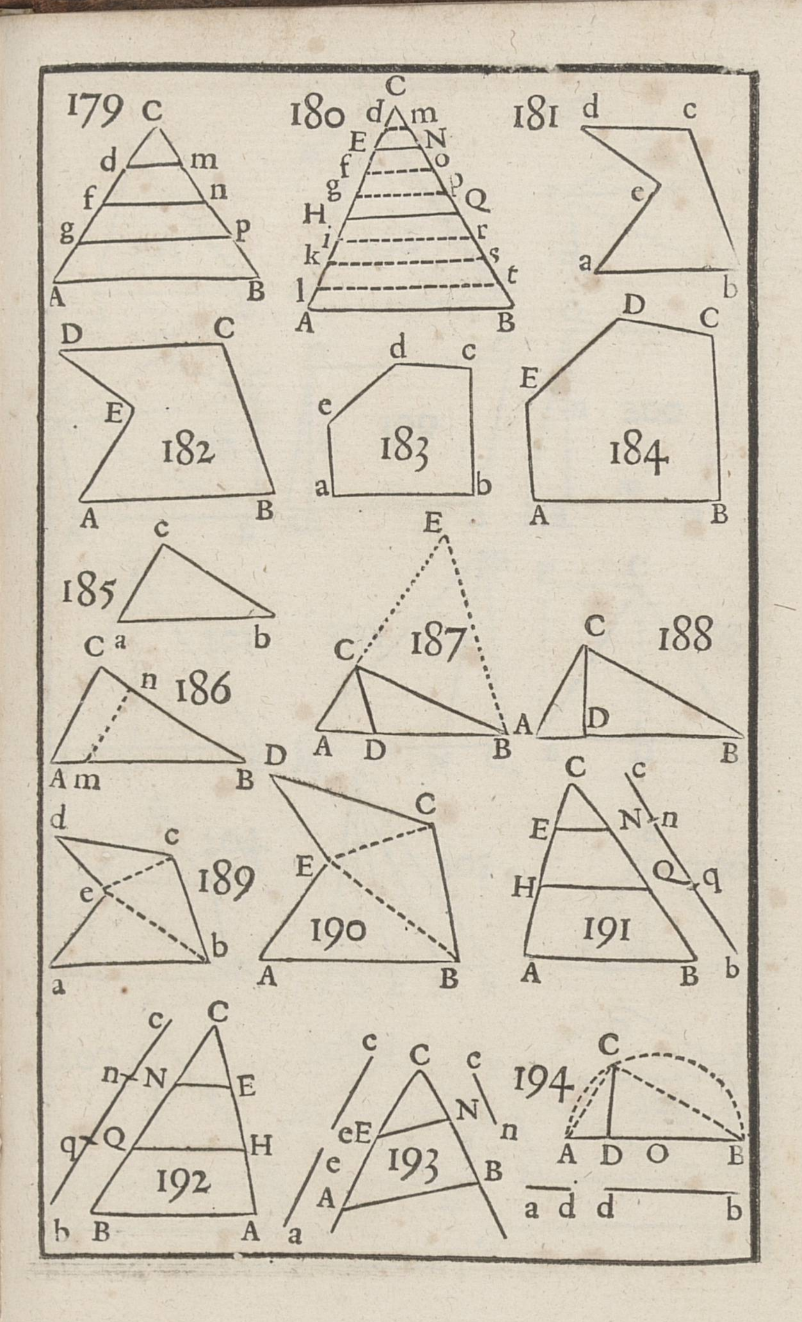
106
C
a A a B
107
c
a b
108
C
c
a A m B
D C
109
A B
D C
110
A B
F C
D
E
111
a b A B
D C
112
A B
d c
113
a b
D C
114
A B
D C
115
A B
D C
116
A B
d c
117
a b
D C
118
A B
d c
119
a f b
D C
120
A F B

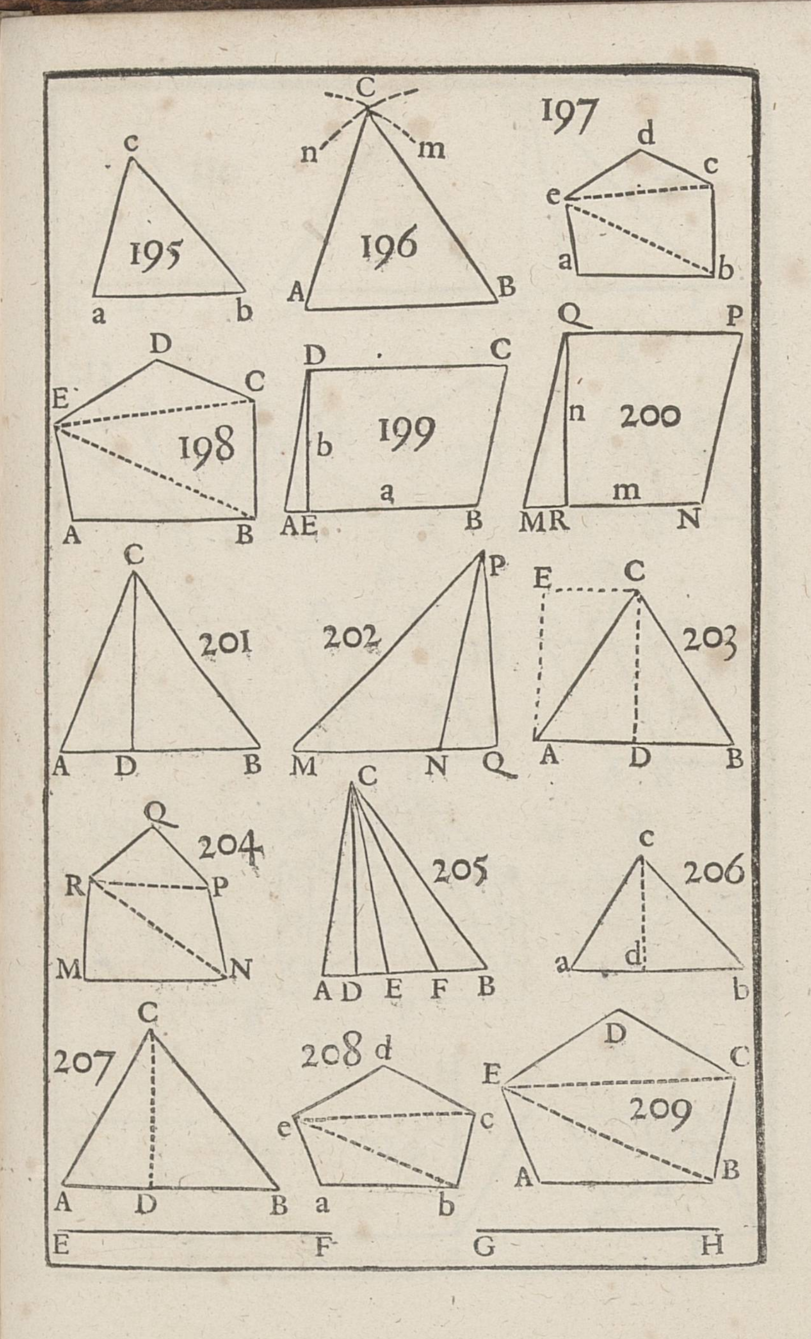

121
d c
a b f
D Cm n
g
122
AF B
D C
e i
123
k o
A B
124
D p r t C
e f g h i
k l m n o
A q f u B
125
H G
E F
D C
126
AP B
C
127
B F A
d c
128
a f b
D C
129
A BF
c
130
a f b
D
C
131
A B F
L
C I
E
K
132
A B H
F G
d C D
133
a bA B

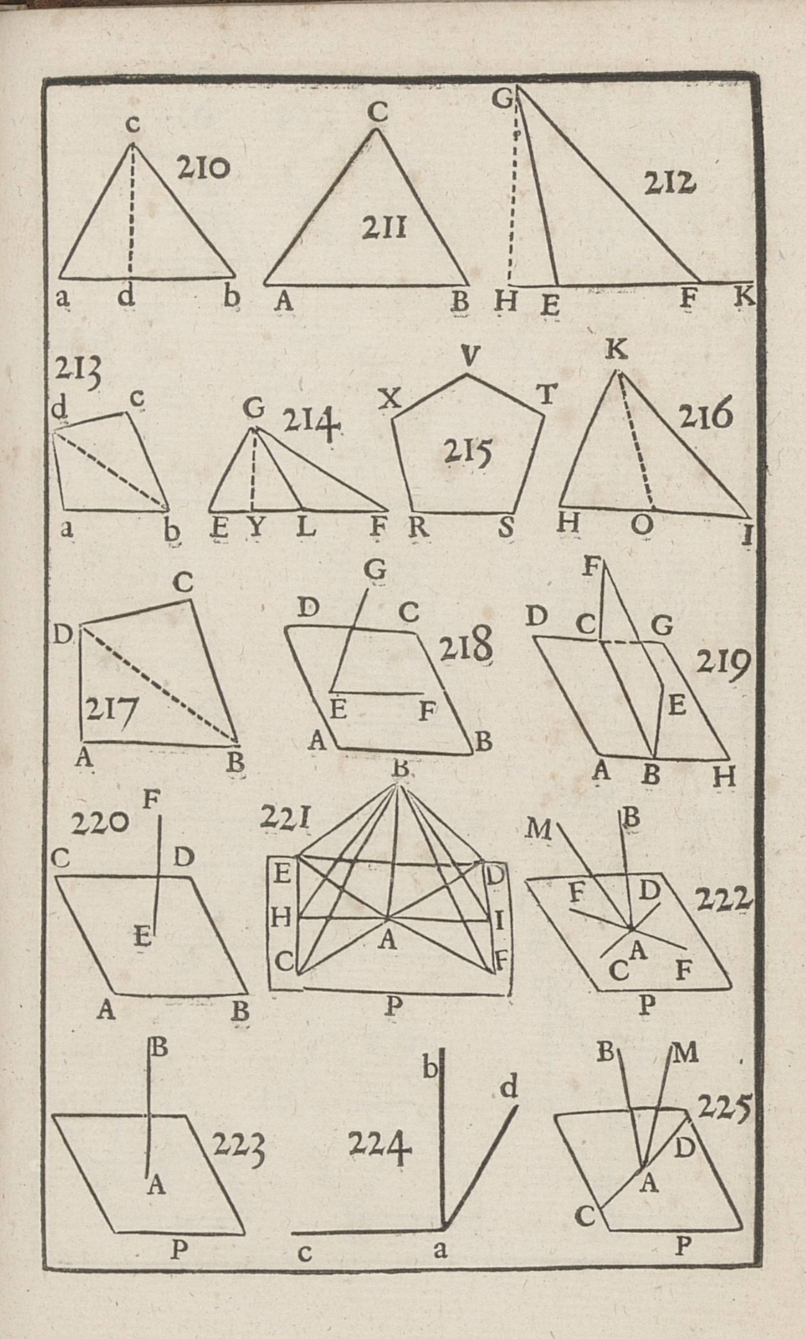

134
C
c
b
x
a
p
A
B
D
C
135
c
x
b
a
Aa-pD
p
B
136
C
B
D
A
E
137
A B
B B
C
138
B
A
D
E
C
139
F
B
A
D
E
C
140
B
D
E
c
141
b
a
d
e
C
142
B
A
D
E
c
d
f
b
a
143
C
D
F
B
A
144
A
145
G B
F
D
C
146
A
B
F
D
C
A
147
B
F
D
C
G
A
148
B
F
D
C


F
G
D
149
B
C
G
F
D
H
150
B
C
D
151
G
B
C
F
H
B
152
D
A
F
G
C
153
A
B
D
F
G
C
D
B
C
A
154
155
d
f
b
A
B
F
D
156
F
A
B
D
F
157
A
B
D
F
158
A
B
C
D
159
F
A
D
B
C
160
F
G
B
D
F
161
H
B
A
D
G
C
162
B
D
c
163
b
d

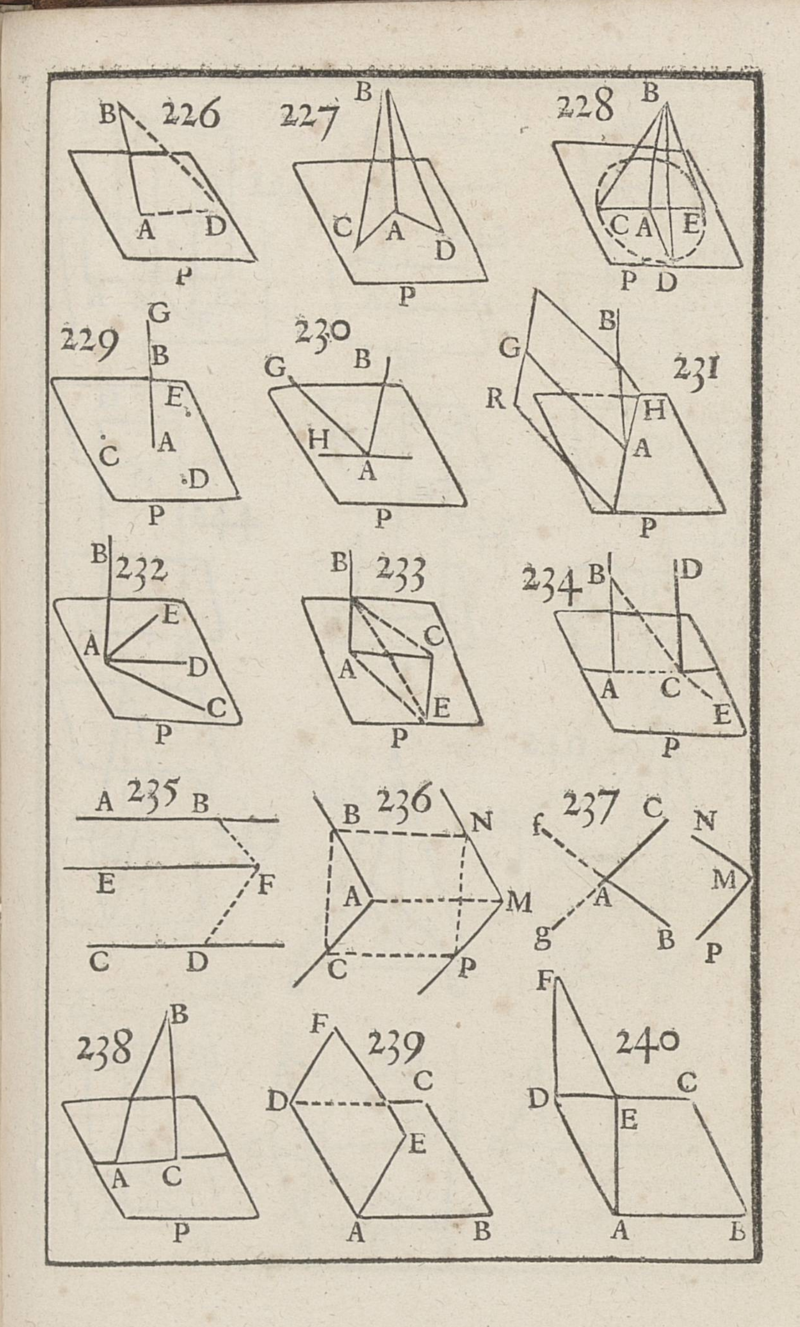

E C H B 164 D
E C H B A 165 D
H C E P B A 166 D
E C H B A 167 D
E C 168 B G A D
E C G A 169 D B
C E G A 170 B D
E C G A 171 B D
C B M 172 D N E
173 C B M D N E
C M B AD O N E 174 P
C 175 M B N AO D P E
F A 176 B G
177 A B M G N P C D E
C d m 178 r f n g p s t A B


179
C
d
m
f
n
g
p
A
B
180
C
d
m
E
N
f
o
g
p
Q
H
i
r
k
s
l
t
A
B
181
d
c
e
a
b
D
C
E
182
A
B
d
c
e
183
a
b
D
C
E
184
A
B
c
185
a
b
E
C
n
186
A m
B
C
187
A
D
B
C
188
A
D
B
D
d
c
189
e
a
b
C
E
190
A
B
C
c
E
N
n
H
Q
q
191
A
B
b
c
C
n
N
E
q
Q
H
192
b
B
A
c
C
c
N
n
eE
e
193
B
A
a
C
194
A
D
O
B
a
d
d
b

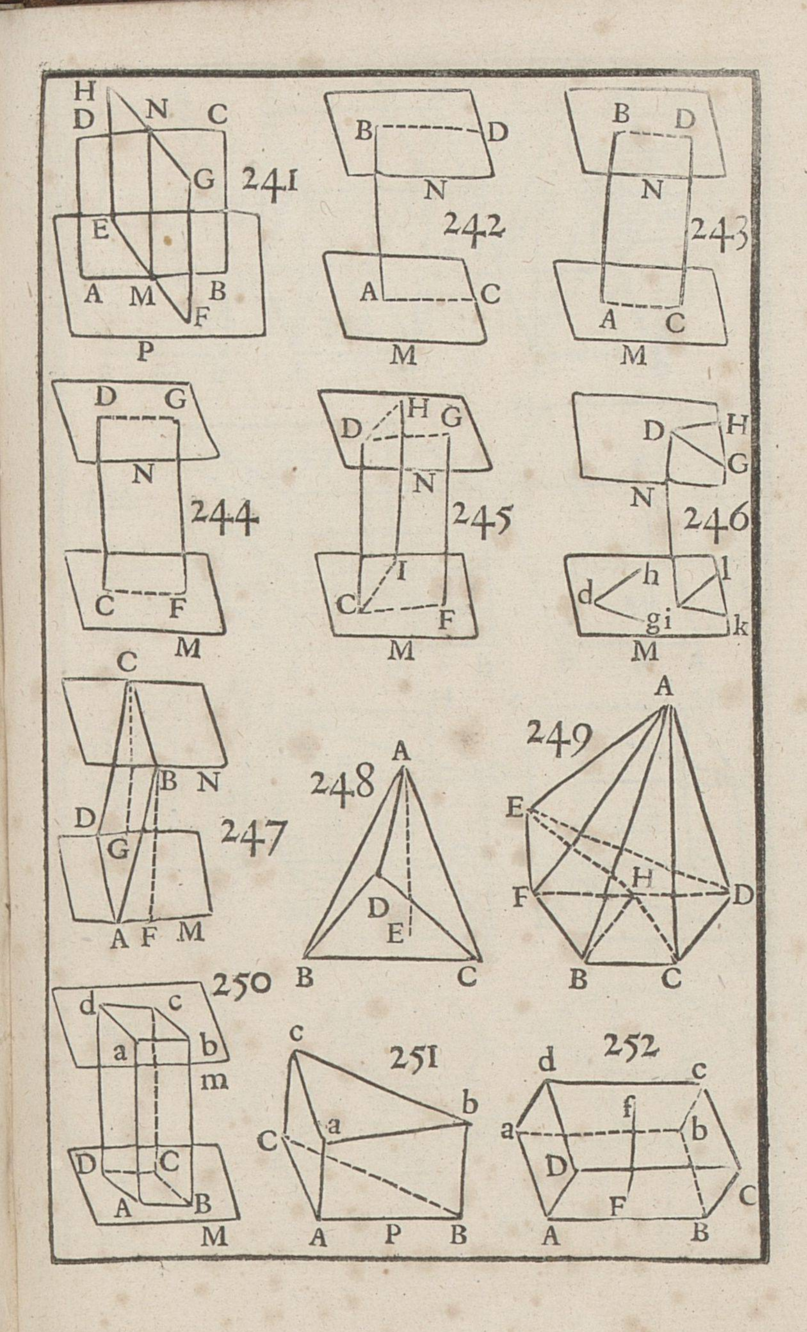

195
c
a
b
196
C
n
m
A
B
197
d
c
e
a
b
198
D
C
E
A
B
199
D
C
b
a
AE
B
200
Q
P
n
m
MR
N
201
C
A
D
B
202
P
M
N
Q
203
E
C
A
D
B
204
Q
R
P
M
N
205
C
A D E F B
206
c
a
d
b
207
C
A
D
B
208
d
e
c
a
b
209
D
E
C
A
B
E
F
G
H



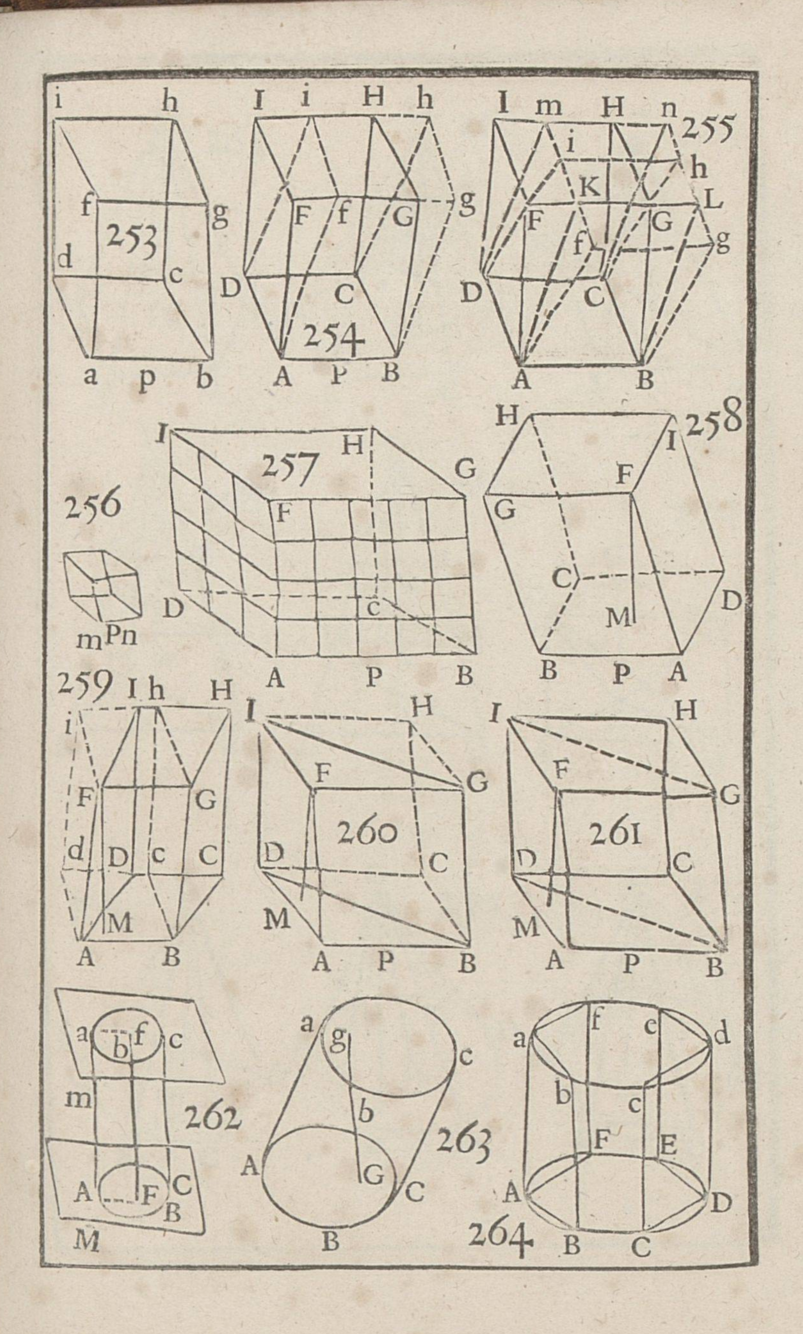
c
210
a d b
C
211
A B
G
212
H E F K
213
d c
a b
G 214
E Y L F
V
X T
215
R S
K
216
H O I
C
D
217
A B
G
D C
218
E F
A B
F
D C G
219
E
A B H
220 F
C D
E
A B
B
221
E D
H I
A
C F
P
M B
F D 222
A
C F
P
B
223
A
P
b
d
224
c a
B M
225
D
A
C
P



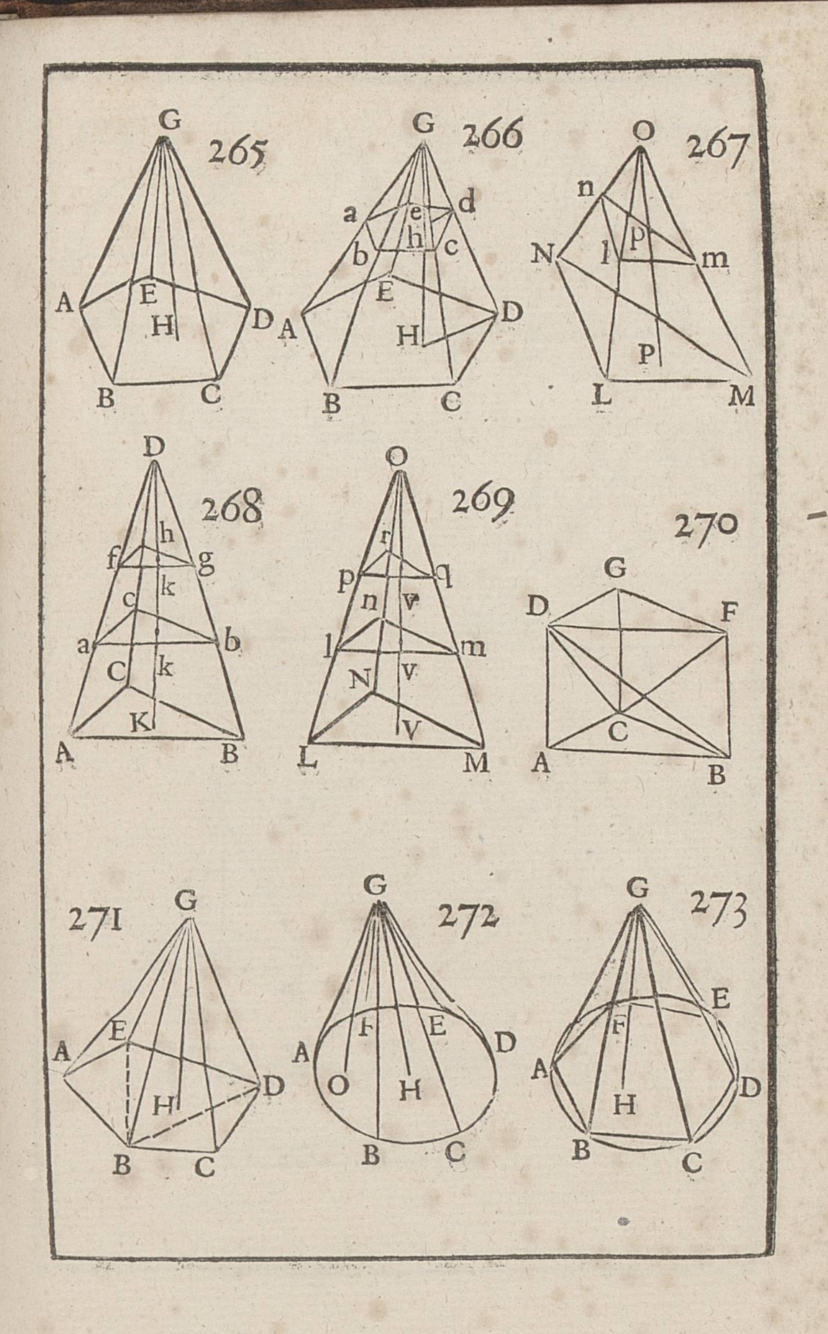
226
B
A
D
P
227
B
C
A
D
P
228
B
C
A
E
P
D
229
G
B
E
C
A
D
P
230
G
B
H
A
P
231
B
G
R
H
A
P
232
B
E
A
D
C
P
233
B
C
A
E
P
234
B
D
A
C
E
P
235
A
B
E
F
C
D
236
B
N
A
M
C
P
237
f
C
N
M
A
g
B
P
238
B
A
C
P
239
F
C
D
E
A
B
240
F
D
C
E
A
B



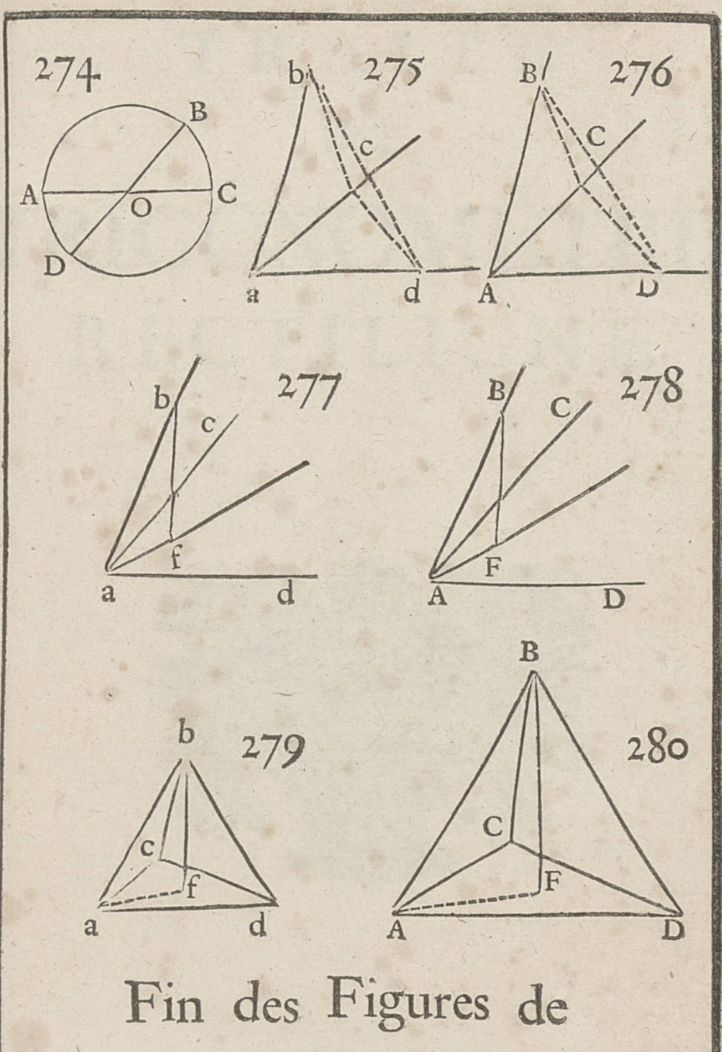
H
D
N
C
G
241
E
A
M
B
F
P
B
D
N
242
A
C
M
B
D
N
243
A
C
M
D
G
N
244
C
F
M
H
D
G
N
245
I
C
F
M
D
H
G
N
246
h
l
d
gi
k
M
C
B
N
D
G
247
A
F
M
A
248
D
E
B
C
A
249
E
H
F
D
B
C
250
d
c
a
b
m
D
C
A
B
M
c
251
b
a
C
A
P
B
252
d
c
f
a
b
D
C
F
A
B



i h f g d 253 c D a p b
I i H h F f G g C 254 A P B
I m H n 255 i h K L F G f g D C A B
256 m P n
I H 257 G F D c A P B
H I 258 F G C D M B P A
259 I h H i F G d D c C M A B
I H F G 260 D C M A P B
I H F G 261 D C M A P B
a f c b m 262 A F C B M
a g c b 263 A G C B
a f e d b c F E A D 264 B C



265
G
A
E
H
D
B
C
266
G
a
e
d
h
b
c
E
A
D
H
B
C
267
O
n
p
N
l
m
P
L
M
268
D
h
f
g
k
c
a
b
C
k
K
A
B
269
O
r
p
q
n
v
l
m
N
v
V
L
M
270
G
D
F
C
A
B
271
G
A
E
H
D
B
C
272
G
F
E
A
D
O
H
B
C
273
G
E
F
A
D
H
B
C



Fin des Figures de Géometrie.

TRAITÉ
DE
TRIGONOMETRIE RECTILIGNE.



YVERDON,

Imprimé chez J. J. Genath, 1725.



[F]autes qu'il faut corriger avant que de lire l'Ouvrage.

Pag:Lig:	Fautes.	Corrections.
11. 6.	ADC - -	BDC
[1]5. 7.	cette -	ce
[1]9. 17.	c - -	C
[1]9. 25.	du coté de *c*	du coté de C
21. 26.	la voisine - -	sa voisine
28. pen:	de sa ligne -	de la ligne
30. 10.	CAB - - -	CAD
32. 26.	sa jambe AC -	sa jambe AB
40. 20.	AC -	AB
51. 8.	commun - -	commun aux deux tr:
53. 6.	Menez - -	Mettez
60. 20.	AFGD - -	AFGB
62. 3.	*ad* - -	*ac*
62. 4.	AD - - - -	AC
62. 20.	rectangle en C -	rectangle en B
76. 25.	EP - -	AP
80. 25 & 26.	DN - -	BN
81. pen:	mettent - -	mettant
87. 17.	CBdes dernieres-	CA, comme la correspondante CN est à la somme CB des derniéres
89. 10.	Ba	BA
89. 16.	Les - -	si les
93. 14.	B angles - -	B, des angles
94. 22.	AB - -	ABE
95. 21.	*en*	*cn*
96. 23.	AB - - -	BC
101. 3.	un point c - -	un point C
103.20	*bc*, :: BC - -	*bc*, BC
109. 9.	voudra -	voudra, mais qui soient dans un même plan
109, der:	CH - -	BH

111.

Pag: Lig:	Fautes.	Corrections.
111. 3.	*cad* - -	*cab*
111.16.	*du* - -	*d'un*
118.24.	NP - -	MP
119. 3.	NP, AM, CP*	NP, BN, AM, CP
119.16.	EAC=l'angleBAD	BAC=NMP
120.20.	EDC - - -	FDC
121. 3.	EAD - -	EAB
125. 3.	DG -	*dg*
126.25.	B,C, par la droite BC - - - -	D, C, par la droite DC
126.27.	< - -	>
126.29.	< - -	>
130.der:	de parallelep:	de deux parallelep:
131.pen:	ABCDEFGHI -	ABCDFGHI
136.der:	avoir - - -	voir
141. 4.	*bad*, BAD - -	*bcd*, BCD
142. 8.	*af* - -	*baf*

Fau-

Fautes qu'il faut corriger dans les Figures.

Fig:

13. *Entre les lettres* B, F *écrivez audessus* C, *& audessus* E
60. *Au lieu de* G *qui est à l'extremité de la dr:* BAG, *écrivez* C
70. *Il faut transposer les lettres* H, G
79. *Mettez* f *à l'extremité de la ligne dont l'autre extremité est* e
80. *Faites la même chose à l'égard de la ligne* eB
81. *Au lieu de* F *écrivez* E, *& mettez* F *à la droite de* E
107. *Les lettres doivent être Italiques.*
111. *Vers le haut de la ligne qui fait un angle avec* ab, *écrivez* d
124. *Au lieu de* f *qui est entre* q, u, *écrivez* s
133. *Au lieu de* d *écrivez* c
156. *Au bas du cercle mettez* C
160. *Au bas du cercle mettez encor* C
246. *Les lettres* i, k, l *doivent être capitales*
252. *Il faut mettre* P *au bas de la figure*
262. *Il faut marquer* P *vers le milieu de la ligne* f F
263. *Ecrivez* P *vers le milieu de* g G
264. *Ecrivez* P *au milieu de la figure*
272. *Les lettres* H, O *sont transposées.*

275, & 276. *Il faut placer les points* c C *un peu plus près des points* a A.



Traité de Trigonometrie Rectiligne.

INTRODUCTION.

Définitions.



Uand on dit que des Grandeurs A,B,C,D en *determinent* d'autres M, N, P, cela signifie que celles ci M, N, P dépendent de celles là A, B, C, D, de maniére qu'elles ne peuvent pas varier pendant que les premiéres A, B, C, D, ne varient pas. Ainsi, deux cotés & l'angle qu'ils forment déterminent un Triangle rectiligne. 1.

La *Trigonometrie plane*, ou *rectiligne*, enseigne à trouver par le calcul les cotés, & les angles qu'on ne connoit pas dans un Triangle rectiligne qui est déterminé par ceux qu'on connoit. 2.

Remarque.

Pour faire ces calculs, il faut avoir de

certaines Tables dont on va expliquer la construction dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE I.

Où l'on explique la Construction des Tables des Sinus, des Tangentes, & des Secantes.

Définitions.

3. *Figur.* 1. SUposé qu'un Arc de Cercle BC soit moindre que le quart BCD de la circonférence, la diférence CD de l'un à l'autre se nomme le *Complement* de l'arc BC.

4. Le *Sinus* d'un Arc BC c'est la perpendiculaire CD menée de l'une des extremi-
Fig: 2 & 3. tés de l'arc, au raïon AB qui aboutit à l'autre extremité B.

5. La *Tangente* d'un Arc BC c'est la droite BG menée de l'une des extremités de l'Arc perpendiculairement au raïon AB qui aboutit à cette extremité, & terminée à la rencontre de la droite indefinie AG qui passe par le centre A, & par l'autre extremité C.

6. La partie AG de cette derniére ligne, com-

comprise entre le centre A, & la Tangente BG, se nomme la *Secante* de l'Arc BC.

Corollaires.

Le Sinus CD, la Tangente BG, & la Secante AG d'un Arc BC qui est entre le quart & la moitié de la circonférence, sont les mêmes que ceux de la diférence CE, ou BH, de cet arc au demi-cercle. 7. Fig: 3.

Le Sinus du Quart de cercle est égal au Raïon. 8.

Car lorsque BC est le quart de la circonférence, le raïon CA est perp: au raïon AB; d'où il suit que le sinus CD perp: au même raïon AB, se confond avec CA.* Fig: 2.

*Elem: de Geom: art: 65.

La Tangente & la Secante du Quart de Cercle sont infinies. 9.

Parce que dans le cas où l'angle CAB est droit, les lignes BG, AC sont paralleles *, & par conséquent ne se rencontrent pas. Fig: 2.

Geom: 65.

Définition.

Suposé que des Arcs ayent le même raport aux circonférences entiéres dont ils sont partie, on les nomme des Arcs *semblables*. 10.

Corollaire.

Les Sinus cd, *CD, les Tangentes* bg, *BG,* 11.

 & les

Fig: 4& 5. *& les Secantes* ag, *AG des Arcs semblables* bc, *BC, ont les mêmes raports aux Raïons* ab, *AB des Cercles dont ces Arcs sont partie.*

Car puisque les arcs *bc*, BC sont semblables, il s'ensuit que les angles *a*, A qu'ils mesurent sont égaux; par conséquent que les triangles rectangles *adc*, ADC; *abg*, ABG, sont équiangles. D'où il resulte que *cd. ac*, ou *ab* : : CD. AC ou AB; que *bg. ab* : : BG.
* 202. AB; & que *ag.ab* : : AG. AB.*

Définition.

12. Le *Sinus*, la *Tangente*, & la *Secante* d'un
f. 5. Angle A, ce sont le sinus CD, la Tangente BG, & la Secante AG de l'arc BC qui le mesure.

Avertissement.

Quand on parle des Sinus de plusieurs Angles, ou des Tangentes, ou des Secantes, & que l'on compare ces lignes les unes avec les autres, on supose toujours que les arcs qui mesurent les angles, soient décrits avec le même raïon.

Définitions.

13. Pour comparer les Sinus, les Tangentes, & les Secantes des Arcs d'un même cercle, & en général les lignes droites qui lui apartiennent; pour les comparer, dis je, les unes avec les autres, on prend le Raïon pour

l'uni-

l'unité : C'est à dire, qu'on les compare avec le Raïon, & qu'on les conçoit par les raports qu'ils ont avec lui, comme on conçoit les nombres par les raports qu'ils ont avec leur unité.

Dans cette vue, on le supose divisé en 10000000 de parties égales, & quand on veut exprimer les *valeurs* des lignes dont je viens de parler, ou, ce qui revient au même, leurs raports au Raïon, on le fait par les nombres qui marquent combien ces lignes contiennent de ces parties. Suposé, par exemple, qu'il y en ait 2909 dans le sinus de l'arc d'une minute, on marquera sa valeur par ce même nombre 2909.

Les Tables dont il s'agit d'expliquer la 14.
construction, contiennent les valeurs des Sinus, des Tangentes, & des Secantes de tous les arcs multiples de celui d'une minute, depuis ce dernier arc jusqu'à celui de 90 degrés.

Avertissement.

Ainsi, on supose toujours dans le reste du Chapitre, que les arcs dont on parle n'excedent pas 90 degrés.

Theorême.

Si l'un des Angles aigus, savoir CAB, d'un 15.
Triangle ABC rectangle en B est de 30 de- f. 6.
grês,

grés, le coté BC opoſé à cet angle eſt la moitié de l'hypotenuſe AC.

Après avoir prolongé BC par ſon extremité B, & pris ſur ce prolongement la partie BD égale à BC, on menera la droite AD.

Puiſque la ſomme des angles aigus CAB, ACB du tr: rectangle ABC, eſt de 90 degrés, & que l'angle CAB eſt ſupoſé de 30, il s'enſuit que l'angle ACB eſt de 60. Or
G:41. le tr: ABD eſt égal au tr:ABC; donc l'angle D, égal à l'angle C, eſt auſſi de 60 degrés: Et l'angle BAD égal à l'angle BAC, eſt de 30 degrés, de même que ce dernier BAC; d'où il reſulte que l'angle CAD eſt encor de 60 degrés. Maintenant, puiſque tous les angles du tr: ADC ſont égaux, ce tr: eſt équilateral; donc CB, qui eſt la moitié de CD, eſt pareillement la moitié de AC.

Problême.

16. *Trouver le Sinus CD de l'Arc BC de 30*
f.7. degrés.

Soit mené le raïon AC.

Puiſque l'arc BC qui meſure l'angle A du tr: ADC rectangle en D, eſt de 30 degrés, il s'enſuit que CD eſt la moitié de
Trigon: article 15. Regle. AC.

Il n'y a donc, pour reſoudre le Problême, qu'à prendre la moitié du Raïon.

Theo-

Theorême.

La partie AD du Raïon AB auquel le Sinus CD d'un arc BC est perpendiculaire, comprise entre le centre A, & le Sinus CD, est égale au Sinus CG du complement CE de l'Arc BC. 17. *fig:8.*

On menera le raïon AC

Le coté AC est commun aux deux tr: ADC, AGC; les Angles ADC, AGC sont droits, par la suposition; & les angles ACD, CAG sont égaux, parce que les droites EA, CD, perp: au raïon AB, sont paralleles. Donc le tr: ADC = tr: AGC; ainsi AD = CG.

Problême.

Suposé que le Sinus CD d'un arc BC soit connu, il s'agit de trouver le Sinus CG, ou AD, de son complement CE. 18. *fig:8.*

On menera encor le raïon AC.

Le tr: ADC rectangle en D donne, $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$; d'où il suit que $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{DC}^2$; & par conséquent que

$$AD = \sqrt[2]{\overline{AC}^2 - \overline{DC}^2}.$$

Après avoir formé les secondes puissances du Raïon & du Sinus donné, on retranchera celle-ci de celle-là, & on prendra la racine quarrée du reste. *Regle.*

Theorême.

19. *Le Sinus CD d'un Arc BC est égal à son*
fig.9. *prolongement DE jusqu'à la circonférence; & l'Arc BC est égal à l'Arc BE de même espece qui a pour Sinus ce prolongement DE.*

Soient menés les raïons AC, AE.

Les tr: ADC, ADE rectangles en D sont égaux, parce que le coté AC leur est commun, & que les hypotenuses AC, AE sont égales. Ainsi, les cotés DC, DE, & les angles DAC, DAE, ou les arcs BC, BE qui les mesurent, sont égaux.

Problême.

20. *Suposé que le Sinus CD d'un Arc BC soit*
fig.10. *connu, il faut trouver le Sinus CG de l'arc double CBE.*

On prolongera le Sinus CD jusqu'à la circonférence, qu'il rencontrera au point
**Trigon: 19.* E. *

Premiérement, puis qu'on connoit CD,
Trig:18. on peut connoitre la droite AD * qui est égale au Sinus du complement de l'arc BC. En second lieu, les tr: rectangles AED, CEG, sont équiangles, à cause de l'angle E qui leur est commun; donc AE. AD :: CE, ou 2CD. CG.

Il faut

Il faut d'abord trouver le Sinus du complement. Ensuite, on fera cette proportion: comme le Raïon est au Sinus du complement; ainsi le double du Sinus donné, est au Sinus qu'on cherche. *Regle.*

Problême.

Le Sinus CG d'un Arc EBC étant connu, trouver le Sinus CD de la moitié BC de cet Arc. 21. *fig:* 10.

Après avoir prolongé comme auparavant le Sinus CD jusqu'à la circonférence, qu'il rencontrera au point E, on considerera 1°. que le Sinus CG étant connu, on peut connoitre la droite AG*; & qu'en retranchant AG de AE, on aura GE. 2°. Que les triangles semblables AED, CEG donnent cette proportion, AE. ED, ou CD :: CE, ou 2CD. GE; d'où l'on conclura que AE. CD :: CD. $\frac{1}{2}$GE. **Trig:* 18.

On cherchera le Sinus du complement; on le retranchera du Raïon; & on prendra la moitié du reste. Après quoi, on cherchera la moïenne proportionelle entre le Raïon & cette moitié. *Regle.*

Theorême.

Tout Arc de cercle BC qui n'excede pas le quart de la circonference, est plus grand 22. *fig:* 11.

 que

que son Sinus CD, & moindre que sa Tangente BE.

Soient menées la corde BC, & du point C la perp: CG au raïon AC, la quelle touchera le cercle au point C.

1°. L'arc BC > la corde BC : Or la corde BG > le Sinus CD, puisque CD est perp: à AB; donc, à plus forte raison, l'arc BC > le Sinus CD.

2°. Il est evident que l'arc BC < BG + GC : Or BG + GC < BG + GE, ou BE, parce que GC étant perp: à AC, il s'ensuit que GC < GE ; donc l'arc BC < la tangente BE.

Corollaires.

23. *Si le Sinus AD du complement d'un arc BC, aproche d'être égal au Raïon AB ; par exemple, s'il lui est à peu près comme 9999998, ou 9999999 est à 10000000 : Je dis que le Sinus CD de l'arc BC aproche aussi d'être égal à l'arc BC.*

Car il suit de ce que les tr: ADC, ABE sont équiangles, que CD. EB :: AD. AB ; par conséquent, que si AD aproche d'être égal à AB, CD aproche aussi d'être égal à EB, & par là même à l'arc CB qui est moindre que EB.

24. *Si les Sinus* ad, *AD des complemens de*
fig. 12. *deux arcs* Bc, *BC d'un même cercle, aprochent*

chent d'être égaux au Raïon AB, les Sinus cd, *CD de ces deux arcs* Bc, *BC, aprochent aussi d'avoir entr'eux le même raport que ces arcs* Bc, *BC.*

Problême.

Trouver le Sinus de l'Arc d'une minute. 25.

1°. Après avoir trouvé le Sinus de l'arc de 30 degrés, * on cherchera celui de la moitié de cet arc*, c'est à dire, celui de 15^{d}. ; ensuite, celui de la moitié de ce dernier arc ; & ainsi de suite jusqu'a ce qu'on ait trouvé le Sinus du 12me. terme de cette progression, ÷ 30.$^{d.}$ 15^{d}. 7^{d}., 30'.&c; c'est à dire, celui de l'arc de 52'', 44''', 3'''', 45'''''.

Regle. *Trig:16. *Trig:21.

Et comme pour avoir le Sinus de ce dernier arc, il aura fallu trouver le Sinus du complement du penultime, on aura pu remarquer que ce sinus du complement est au Raïon à peu près comme 9999998 est à 10000000 ; on en conclura qu'on peut suposer, sans craindre qu'il en resulte aucune erreur sensible, que les Sinus des arcs moindres que ce penultiéme sont eutr'eux comme ces arcs*.

*Trig: 23 & 24.

2°. Pour avoir le Sinus de l'arc d'une minute, on suposera donc la proportion suivante, dont on cherchera le quatriéme terme. Comme 52'', 44''', 3'''', 45''''', & à 1' ; Ainsi le sinus du premier de ces deux arcs ; est à celui du second.

Theo-

Theorême.

26. *Supofé que trois Arcs BC, BD, BE d'un*
fig. 13. *même cercle, ſoient en progreſſion arithmetique; le Raïon AD eſt à deux fois le ſinus AL du complement de la diférence DE, ou CD, de cette progreſſion, comme le Sinus DH de l'arc moïen BD eſt à la Somme des ſinus CG, EI des arcs extrémes BC, BE.*

Ayant prolongé le ſinus EL juſqu'à la circonférence, qu'il rencontrera au point C, menez la perp: LK, & les paralleles LN, CM au raïon AB.

Trig:19. Dans les tr: ELN, LCM, EL = LC; l'angle ELN = l'angle LCM, parce que les droites LN, CM ſont paralleles; l'angle NEL = l'angle MLC, à cauſe des paralleles EI, LK: Donc ces deux tr: ELN, LCM ſont égaux; d'où il ſuit que EN = LM. Or EN eſt la diférence de EI à LK; & LM eſt celle de KL à CG: Donc les trois lignes CG, LK, EI, ſont en progreſſion arithmetique; Ainſi par l'article 205 des Elemens des Mathematiques, 2LK = CG + EI.

Cela poſé, puiſque les tr: AHD, AKL ſont équiangles; par conſéquent que AD. AL :: DH, LK; d'où il ſuit que AD. 2AL :: DH. 2LK: Il eſt clair que AD. 2AL :: DH. CG + EI.

Pro-

Problême.

Trouver les Sinus de tous les arcs multiples de celui d'une minute, depuis ce dernier arc jusqu'à celui de 60 degrés. 27.

1o. Je supose qu'on ait trouvé le sinus de 1'.* On cherchera ensuite celui du complement, c'est à dire, celui de 89d. 59'*;& celui de 2'*. *Regle.* *Trig:24. *Trig:18. *Trig:20.

2o. Pour trouver le Sinus de 3', on considerera que 1', 2', 3', sont en progression arithmetique, & que la diférence de cette progression est 1'; d'où l'on conclura que le Raïon est à deux fois le Sinus du complement de la diférence 1', comme le Sinus de 2' est à la somme des Sinus de 1', & de 3'.* On prendra donc le quatriéme terme de cette proportion ; on en retranchera le sinus de 1', & on aura dans le reste le sinus de 3'. *Trig:26.

3o. Pareillement, pour avoir le sinus de 4', on remarquera que 2', 3', 4' sont en progression arithmetique, & que la diférence de cette progression est encor 1'; par conséquent, que le Raïon est à deux fois le Sinus du complement de 1', comme le Sinus de 2' est à la somme des Sinus de 2' & de 4'. Ainsi on cherchera le dernier terme de cette proportion ; on en retranchera le Sinus de 2', & on aura celui de 4'.

On

On continuera de la même maniére jusqu'à ce qu'on ait trouvé le Sinus de 60 degrés.

Theorême.

28. *Lorsque trois Arcs BC, BD, BE, d'un même cercle, sont en progression arithmetique, & que l'arc moïen BD & de 60 degrés; le Sinus EL de la diférence DE ou CD de cette progression, est égal à la diférence des sinus CG, EI des arcs extrémes BC, BE.*

fig:14.

Prolongez le Sinus EL jusqu'en C, & menez par le point C la parallele CM à GI.

Puisque les Angles A, E des tr: rectangles AIH, ELH, sont égaux, & que l'angle A est de 60 degrés, l'angle E a la même valeur. Or la somme des angles aigus E, ECM du tr: rectangle ECM est de 90 degrés; donc l'angle ECM est de 30 ; d'où il suit que

Trig:15 EC = 2EM *; par conséquent que EL = EM, qui est la diférence des sinus CG, EI.

Problême.

29. *Trouver les sinus de tous les arcs multiples de celui d'une minute, depuis l'arc de 60 degrês, jusqu'à celui de 90.*

Regle. 1°. On ajoutera le sinus de 1' avec celui de 59^d, 59, & on aura celui de 60^d 1'. Car 59^d 59', 60^d, 60^d 1', forment une progression

sion arithmetique dont la diférence est 1'; d'où il suit que le sinus de 1', est égal à la diférence des sinus de 59$^{d.}$ 59' & de 60^{d}. 1'.

2ò. Par la même raison, pour avoir le sinus de 60^{d}. 2', on ajoutera le sinus de 2' avec celui de 59^{d} 58'.

On continuera de la même maniére jusqu'à ce qu'on ait entiérement resolu le Problême.

Theorême.

Le sinus AD du complement d'un arc BC, est au Sinus CD de cet arc, comme le Raïon AB est à la Tangente BG. Le même Sinus AD du complement est au Raïon AB, comme le Raïon AC est à la Secante AG. 30. *fig*: 15.

Ce sont là des suites évidentes de ce que les tr: ADC, ABG sont équiangles.

Problême.

Trouver les Tangentes & les Secantes de tous les arcs multiples de celui d'une minute, depuis ce dernier arc jusqu'à celui de 90 degrés. 31.

Regle. Il n'y a qu'à chercher les derniers termes des proportions précédentes, apliquées aux arcs dont il s'agit.

CHAPITRE II.

Du Calcul des Triangles rectangles.

Problême.

32. *fig. 16,* *L'Un des deux angles aigus A, C, d'un tr: rectangle ABC, par ex: l'angle A, étant connu, trouver l'autre C.*

Regle. Puiſque leur ſomme eſt égale à un angle droit, il eſt clair qu'il n'y a qu'à retrancher l'angle A qu'on connoit, de 90 degrés.

Définition.

33. *fig: 16.* Les cotés AB, BC qui forment l'angle droit B d'un Triangle rectangle ABC, ſeront nommés les *Jambes* du Triangle.

Problême.

34. *fig: 17.* *Supoſé qu'on connoiſſe une Jambe AB, & les Angles aigus A, C d'un Triangle rectangle ABC, trouver l'autre jambe BC.*

Regle. On cherchera le dernier terme de cette proportion : Comme le Raïon *Ab* eſt à la Tangente *bc* de l'angle A opoſé à la jambe inconnue BC; ainſi la jambe AB qu'on connoit,

noit, est à celle qu'il faut trouver, savoir BC.

Problême.

Les mêmes choses étant connues, trouver l'Hypotenuse AC. 33. fig. 17. & 18.

On cherchera le dernier terme de quelle qu'on voudra des deux proportions suivantes. *Regle.*

Comme le Raïon A*b* est à la secante A*c* de l'angle A formé par l'hypotenuse AC & par la jambe AB qu'on connoit; ainsi cette jambe AB est à l'Hypotenuse AC. fig: 17.

Comme le sinus *bc* de l'angle A oposé à la Jambe connue BC est à l'Hypotenuse AC. fig: 18.

Problême.

Supose qu'on connoisse l'Hypotenuse AC, & les deux Angles aigus A, C, d'un Triangle rectangle ABC, il s'agit de trouver celle qu'on voudra de deux Jambes, par exemple CB. 36. fig. 18.

Il faut chercher le dernier terme de cette proportion. Comme le Raïon A*c* est au sinus de l'angle A oposé à la jambe CB qu'il faut trouver; ainsi l'Hypotenuse AC est à cette Jambe CB. *Regle.*

Problême.

37. *Les Jambes AB, BC d'un Triangle rect-*
fig. 17. *angle ABC étant connues, trouver quel qu'on voudra des Angles aigus, par exemple l'angle A.*

Il n'y a qu'à chercher le dernier terme de cette proportion. Comme la Jambe AB qui sert à former l'angle A qu'on cherche, est à l'autre Jambe BC; ainsi le Raïon A*b* est à la Tangente *bc* de cet angle A. Car lors qu'on aura trouvé cette Tangente, il n'y aura qu'à la chercher dans les Tables, & on verra vis à vis la valeur de l'angle A auquel elle apartient.

Problême.

38. *Suposé qu'on connoisse l'Hypotenuse AC,*
fig. 18. *& une Jambe CB d'un Triangle rectangle ABC, il faut trouver les Angles aigus A, C.*

Regle. 1°. On cherchera le dernier terme de cette proportion: comme l'Hypotenuse AC est à la Jambe connue CB; ainsi le Raïon A*c* est au Sinus *cb* de l'angle aigu A oposé à la jambe connue CB. 2°. On retranchera cet angle A de 90 degrés, & on aura dans le reste l'autre angle aigu C.

Problême.

39. *Les deux Jambes AB, BC d'un Triangle*

gle rectangle ABC étant connues , trouver l'Hypotenuse AC. *fig. 19.*

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; don $AC = \sqrt[2]{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$.

Après avoir formé les secondes puissances des deux Jambes AB, BC, on les ajoutera ensemble, & on prendra la racine quarré de leur somme $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. *Regle.*

Problême.

Une Jambe AB, & l'Hypotenuse AC d'un Triangle rectangle ABC étant connues, trouver l'autre Jambe BC. 40.

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$; donc $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$; par conséquent $BC = \sqrt[2]{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}$

On formera d'abord les secondes puissances de la Jambe connue AB & de l'Hypotenuse AC; après quoi on retranchera la premiére de la seconde, & on prendra la racine quarrée du reste. *Regle.*

CHAPITRE III.

Du Calcul des Triangles obliquangles.

Pro-

Problême.

41. *Deux Angles A, B d'un Triangle ABC é-*
fig:20. *tant connus trouver le troisiéme C.*

Regle. Puisque la somme de ces trois Angles A, B, C est égale à celle de deux droits, il est clair qu'il n'y a qu'à ajouter ensemble les deux Angles connus A,B, & retrancher leur somme de 180 degrés.

Theorême.

42. *Les cotés AC, BC d'un Triangle ABC sont*
fig:21. *entr'eux comme les Sinus des Angles B,A qui leur sont oposés.*

Si les cotés AC, BC étoient égaux, les angles B, A, & par conséquent leurs sinus le seroient aussi ; Ainsi la Proposition seroit évidente. Suposons donc que ces cotés AC, BC soient inégaux, & que AC soit le moindre.

Des points A,B,& avec des raïons AC, BF égaux au coté AC, soient décrits les arcs CM, FN, qui mesurent les Angles A,B. Ensuite, soient menés les Sinus FG, CD de ces arcs, ou de ces angles.

Il faut demontrer que AC, ou BF. BC : : FG. CD ; ce qui est bien évident, puisque les tr: BFG BCD, sont équiangles.

Pro-

Problême.

Un coté AC, & les trois Angles d'un Triangle ABC étant connus, trouver celui qu'on voudra de deux autres cotés, par exemple BC. 43. *fig:* 20.

Il faut chercher le dernier terme de cette proportion. Comme le Sinus de l'angle B oposé au coté connu AC, est au Sinus de l'angle A oposé au coté BC qu'on cherche; Ainsi le coté connu AC, est à celui qu'il faut trouver, savoir BC. *Regle.*

Problême.

Suposé qu'on connoisse deux cotés AC,BC d'un Triangle ABC, l'un des deux Angles A,B qui leur sont oposés, par exemple l'angle B, & l'espece de l'autre angle A; il s'agit de trouver cet autre Angle A. 44. *fig:* 20.

1o. On prendra le dernier terme de la proportion suivante. Comme le coté AC oposé à l'angle connu B est au coté BC oposé à l'angle inconnu A; ainsi le Sinus de l'angle connu B est au Sinus de l'angle A qu'il faut trouver. 2o. On cherchera ce dernier Sinus dans les Tables, & on verra vis à vis la valeur de l'angle aigu auquel il apartient: Ainsi, pour avoir la valeur de l'angle A qu'il faut trouver, il n'y aura qu'à pren- *Regle.*

prendre celle là, s'il eſt aigu ; & qu'à la retrancher de 180 degrés, s'il eſt obtus.

Problême.

45. fig:22. *La ſomme & la diférence de deux grandeurs inegales AB, BC, étant connues, trouver ces deux grandeurs AB, BC.*

Si on diviſe AC en deux parties égales AM, MC, & qu'on prenne AD égale à BC, on verra que AM eſt la moitié de la ſomme AC de deux gr: AB, BC, & que MD ou MB eſt la moitié de leur diférence DB ; d'où l'on tirera cette Regle.

Regle. Après avoir pris la moitié AM de la ſomme des deux gr: AB, BC, & la moitié MB ou MD de leur diférence ; 1°. On ajoutera enſemble ces deux moitiés AM, MB, & l'on aura la plus grande AB. 2°. On retranchera la moitié MD de la diférence DB ; de la moitié AM de la ſomme, & on aura la moindre grandeur AD ou BC.

Lemme.

46. fig:23. *Si deux cotés CA, CB d'un Triangle ABC ſont inégaux & qu'après avoir prolongé le moindre CA juſqu'en D, enſorte que CD ſoit égale à CB, on mene la droite DB ; 1°. L'Angle ADB ſera la moitié de la ſomme des angles CAB, CBA du Triangle ABC, opoſés aux cotés inégaux CA, CB. 2°. L'Angle*

gle ADB sera la moitié de leur diférence.

L'Angle ADB+l'angle ABD = l'angle CAB* ; d'où il suit, en ajoutant de part & d'autre CBA, que ADB+ABD+CBA, c'est à dire ADB+CBD = CAB+ CBA. Or puisque CD = CB, CDB, ou ADB = CBD ; d'où il suit que ADB + CBD = 2ADB: Donc 2ADB= CAB+CBA; par conséquent ADB = $\frac{1}{2}$CAB+ $\frac{1}{2}$CBA. *Geom: 113.

Puisque l'angle ADB, ou CBD, ou CBA + ABD= $\frac{1}{2}$CAB, + $\frac{1}{2}$CBA, il est clair, en retranchant de part & d'autre CBA, que ABD = $\frac{1}{2}$CAB − $\frac{1}{2}$CBA.

Theorême.

Dans un Triangle ABC qui a deux cotés inégaux CA, CB, la somme de ces deux cotés est à leur Diférence, comme la Tangente de la moitié de la somme des angles CAB, CBA qui leur sont oposés, est à la Tangente de la moitié de leur diférence. 47. *fig:* 24.

Ayant prolongé CA jusqu'en D, ensorte que CD soit égale à CB, & mené la droite DB, on remarquera que AD est la diférence des cotés inégaux CA, CB; que l'angle ADB est la moitié de la somme des angles CAB, CBA*; & que l'angle ABD est la moitié de leur diférence. Des points D, B & avec le raïon DB, on décrira donc les arcs de cercle BF, DG, qui mesurent les angles ADB, ou CDB, & ABD; & de ces mêmes points B, D, on élevera au raïon DB les perp: BH, DI, qui seront les Tangentes *Trig. 46.

des arcs BF, DG, ou des angles CDB, ABD. Ensuite on considérera que le tr: DBH étant rectangle en B, il en resulte que la somme de ses angles aigus CDB + CHB = l'angle droit DBH = l'angle CBD + l'angle CBH, & en retranchant les angles égaux CDB, CBD, que CHB = CBH. D'où l'on conclura que CH = CB; par conséquent que AC + CH ou AH, est la somme des cotés inégaux AC, CB du triang. ABC.

Maintenant, puisque les perp: BH, DI à la même droite DB sont paralleles, il est clair que les tr: ABH, AID sont équiangles; par conséquent que AH. AD :: BH. DI.

Problême.

48. *fig: 20.* *Deux cotés CA, CB d'un Triangle ABC étant connus, avec l'angle C qu'ils forment, trouver les deux autres angles A, B.*

Regle. 1°. Ajoutez ensemble les deux cotés connus CA, CB, & vous aurez leur somme.

2°. Retranchez le moindre CA du plus grand CB, & vous aurez leur diférence.

3°. Retranchez l'angle connu C de 180 degrés, pour avoir dans le reste la somme des

des deux autres angles A, B. Après quoi vous prendrez la moitié de cette somme, (moitié que j'apellerai $\frac{1}{2}$S) & vous chercherez dans les Tables la Tangente de cette moitié.

4°. Prenez le dernier terme de la proportion suivante. La somme des deux cotés connus CA, CB est à leur diférence, comme la Tangente de $\frac{1}{2}$S est à la Tangente de la moitié de la diférence des angles A, B qu'il faut trouver, moitié que je nommerai $\frac{1}{2}$D. Ensuite cherchez dans les Tables la valeur de l'angle auquel cette derniére Tangente apartient, c'est à dire la valeur de $\frac{1}{2}$D.

5°. Cherchez les angles inconnus A, B*. *Trig.
C'est à dire, ajoutez ensemble $\frac{1}{2}$S & $\frac{1}{2}$D, & 45.
vous aurez le plus grand des deux angles A, B qu'il faut trouver, savoir A. Retranchez ensuite $\frac{1}{2}$D de $\frac{1}{2}$S, & vous aurez le moindre angle B.

Remarque.

Si les cotés connus CA, CB étoient égaux, il est clair que pour avoir la valeur de chacun des deux angles A, B oposés à ces cotés, il n'y auroit qu'à retrancher l'angle connu C de 180 degrés, & prendre la moitié du reste.

Problême.

Les trois cotés d'un Triangle isocelle ABC 49.
étant connus, trouver les trois angles. fig: 25.

Soit imaginée la perp: CD menée de la pointe de l'angle ACB formé par les cotés égaux CA, CB, au troisiéme coté AB, laquelle tombera au dedans du tr: ABC, à cause des angles aigus A, B, oposés aux cotés égaux CA, CB, & divisera le tr: ABC en deux tr: ADC, BDC rectangles & é-
*Geom: gaux. *
120.

Cela posé, 1°. On cherchera les angles aigus de l'un de ces deux tr:, par exemple
Trig: les angles ACD, A du tr:ADC,& on aura
38. dans le premier ACD que donnera l'operation, la moitié de l'angle ACB du tr: isocelle, formé par les cotés égaux CA, CB. 2°. Pour achever de resoudre le Problême; on doublera donc ce premier angle trouvé ACD.

Remarque.

Si le Triangle proposé étoit équilateral, il est évident que pour avoir la valeur de chacun de ses angles, il n'y auroit qu'à prendre le tiers de 180 degrés.

Theorême.

50. *Si de la pointe C du plus grand angle d'un*
fig:26. Triangle scalene ABC, on mene au cote oposé AB une perp: CD, 1°. Elle tombera au dedans du Triangle ABC. 2°. Elle divisera le coté oposé AB en deux segmens inégaux AD, DB, dont le moindre sera celui qui se trouve-

ra

ra du même coté, par raport à la perp: CD, que le moindre CA de deux autres cotés CA CB du Triangle, c'eſt à dire que ce ſera AD. 3°. On aura cette proportion: Le plus grand coté AB eſt à la ſomme de deux autres CA, CB; comme leur diférence eſt à celle des ſegmens AD, DB.

Du point C, & avec le raïon CB, decrivez le cercle BFGH; prolongez les cotés AC, AB, le premier AC de part & d'autre, le ſecond AB par le point A, juſqu'à la rencontre de la circonférence aux points F, G, H; & menez les droites FG, BH.

1°. Puiſque le coté AB du tr: ABC eſt plus grand que chacun des deux autres CA, CB, il s'enſuit que l'angle ACB eſt auſſi plus grand que chacun des deux angles CAB, CBA; par conſéquent que ces deux derniers angles CAB, CBA ne peuvent être ni droits, ni obtus, & par la même qu'ils ſont aigus. Donc la perp:CD au coté AB tombe au dedans du Triangle ABC.

2°. La droite CD étant perp: à la corde GB, il en reſulte que GD = DB, par conſéquent que AD, qui eſt partie de GD, eſt moindre que DB.

3°. Puiſque GD = DB, comme on vient de le voir, AG qui eſt la diférence de AD à GD, eſt celle de AD à DB. Il n'eſt pas moins évident que AH eſt la ſomme des deux cotés AC, CB; & que AF eſt leur diférence.

rence. Presentement, puisque les angles FGA, ou FGB, BHA ou BHF qui ont leurs pointes G, H dans la circonférence du cercle, & qui se reposent sur le même arc FB, sont égaux, il est clair que les tr: ABH, AFG sont équiangles ; & qu'ainsi AB AH :: AF. AG.

Theorême.

51. *Les trois Cotés d'un Triangle scalene ABC*
fig:27. *étant connus, trouver les trois angles.*

Soit imaginée la perp: CD menée de la pointe C de son plus grand angle ACB au coté oposé AB, laquelle tombera au dedans du tr:, & divisera son plus grand coté AB en
Trig: 50 deux segmens inégaux AD, DB.

Cela posé, 1°. on cherchera le dernier terme de cette proportion : Comme le plus grand coté AB du tr: ABC, est à la somme des deux autres AC, CB ; Ainsi leur Diférence est à celle des segmens AD, DB. 2°.
Trig: 45 On cherchera la valeur de ces segmens.
3°. On trouvera les angles aigus des tr: rect-
Trig: 38. angles ADC, BDC formés par la perp: CD, & on ajoutera ensemble les deux ACD, DCB de ces angles dont elle est un coté commun.

F I N.

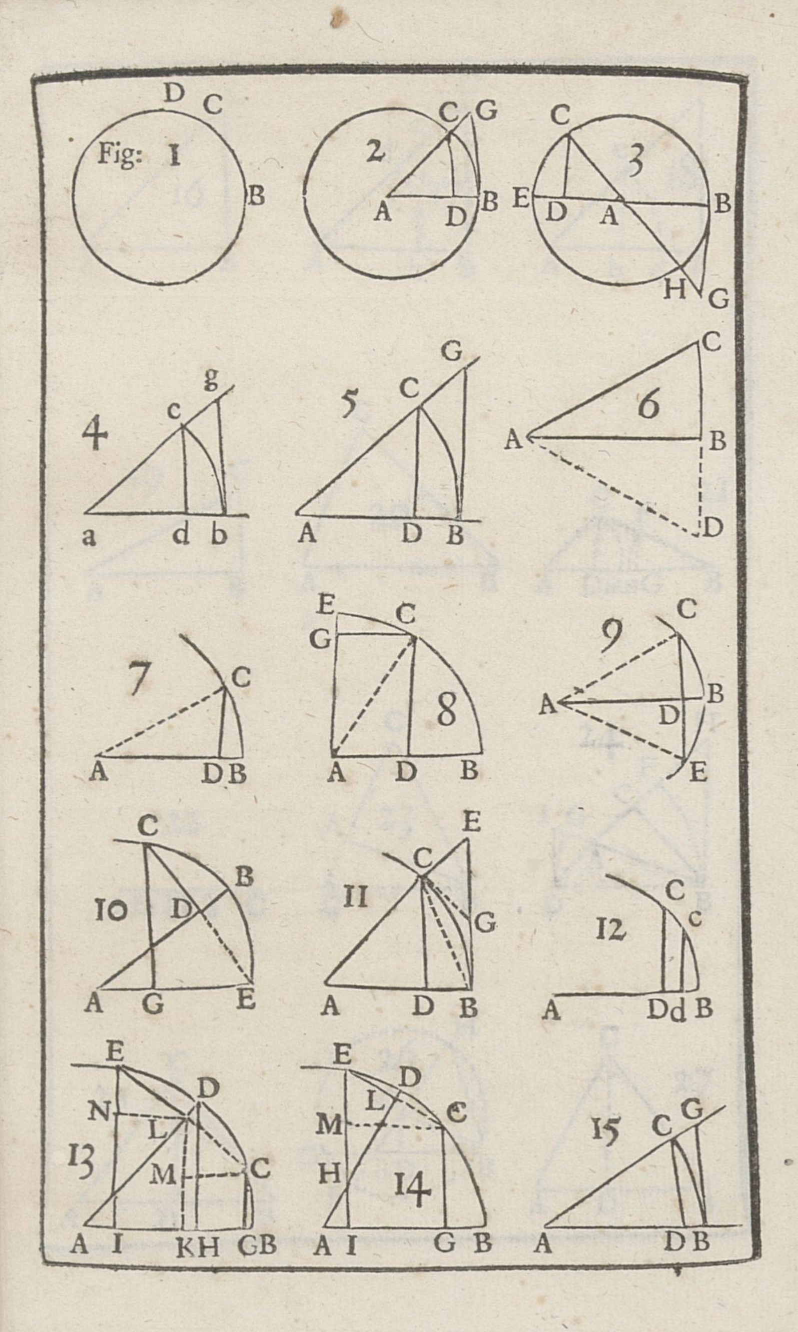
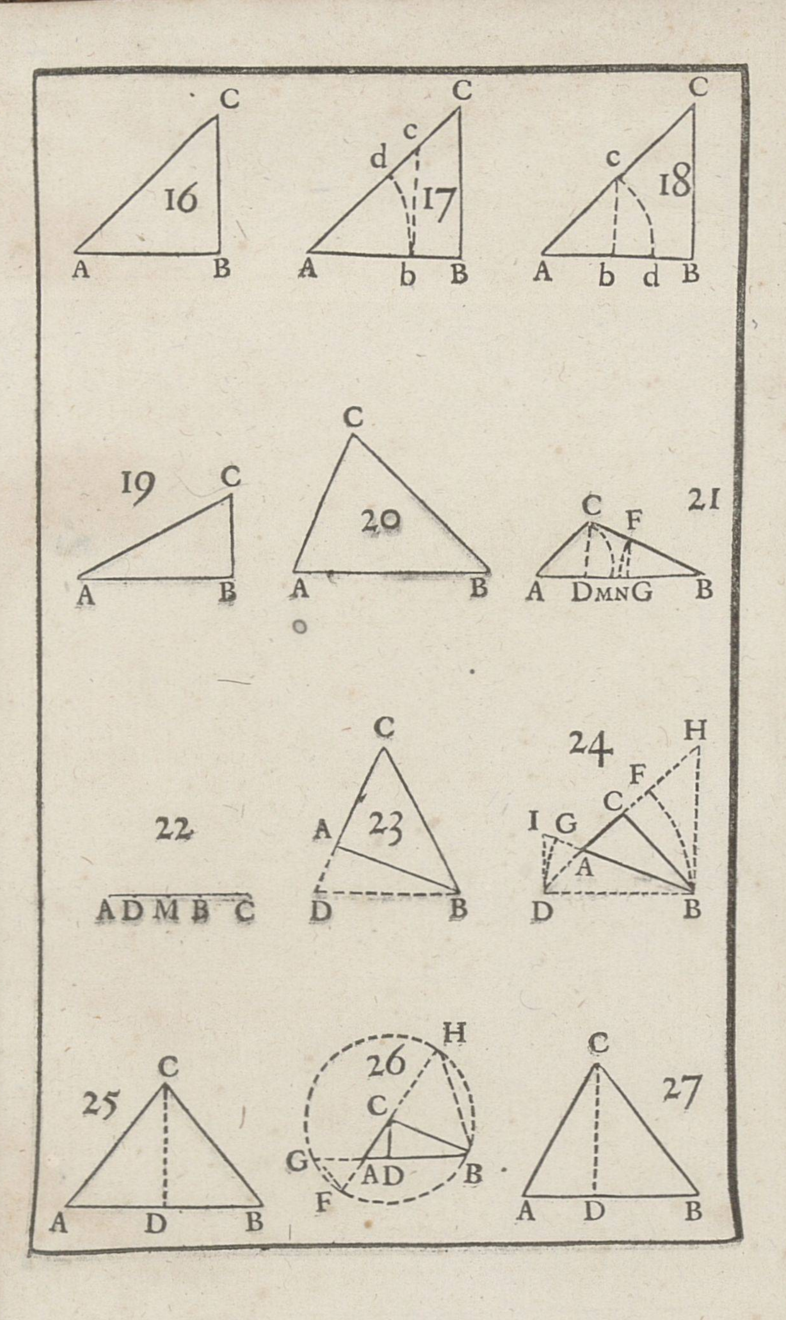
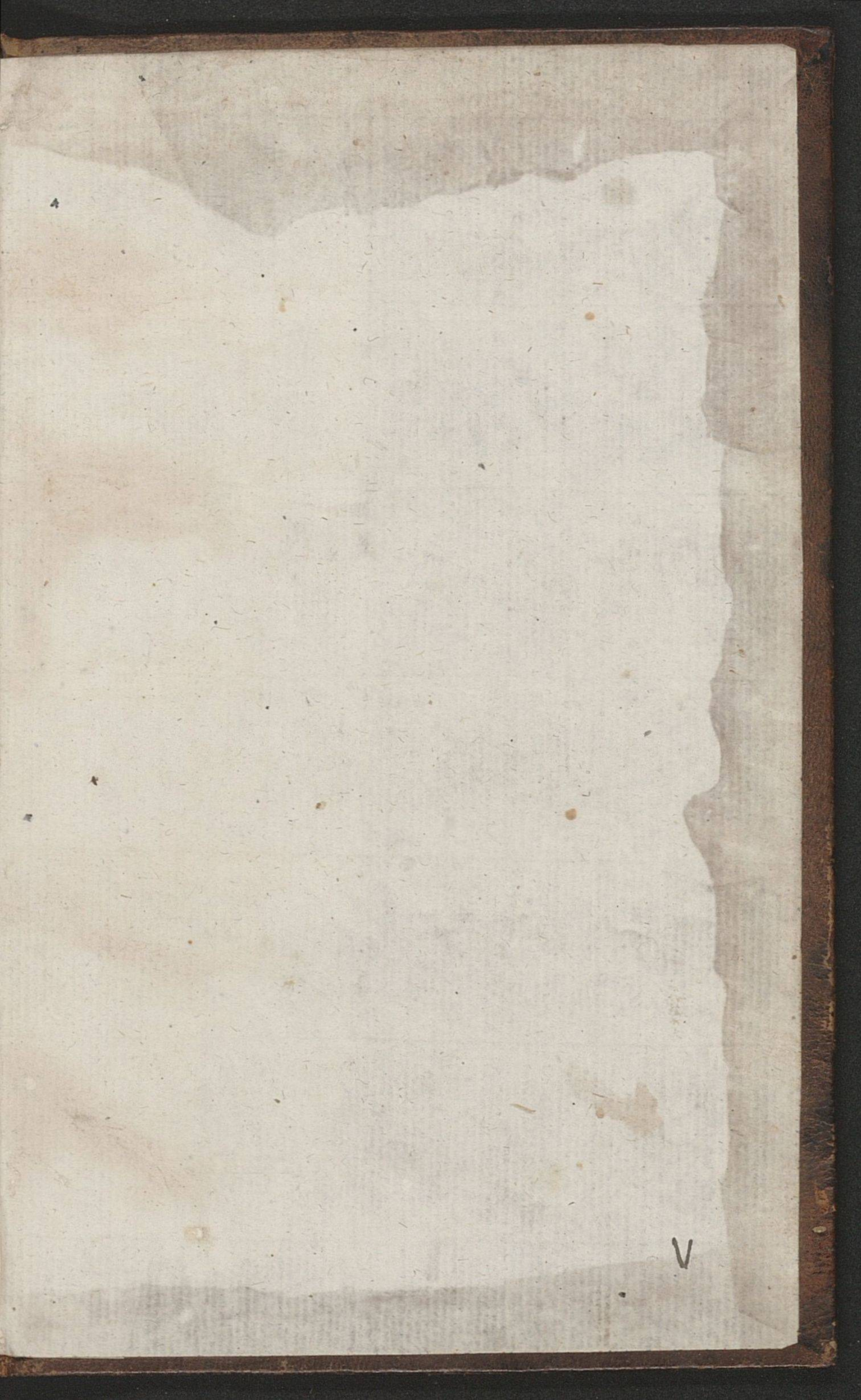
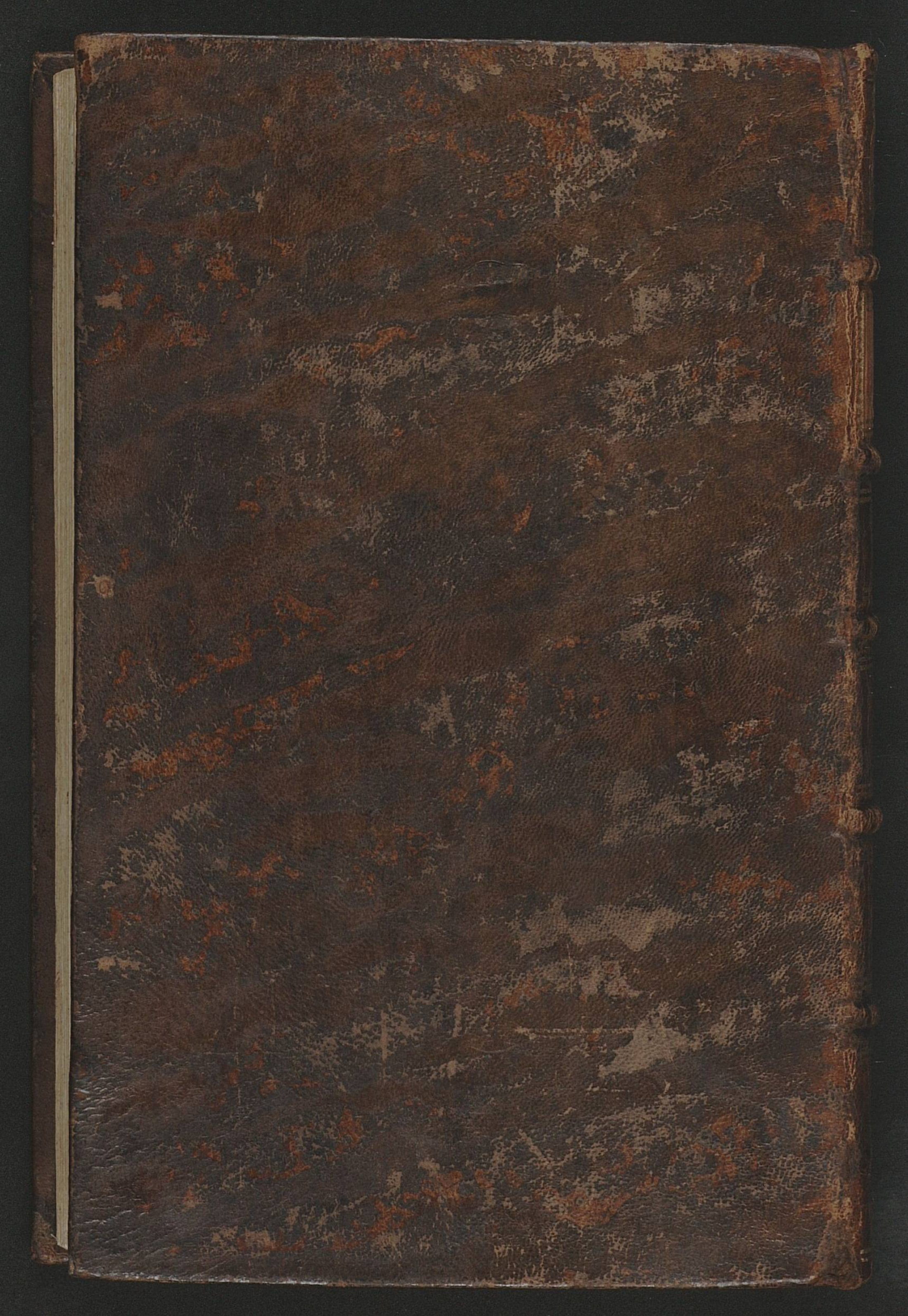


Fig: 1
D C B
2
C G
A D B
3
C
E D A B
H G
4
g
c
a d b
5
G
C
A D B
6
C
A B
D
7
C
A DB
8
E C
G
A D B
9
C
A B
D
E
10
C
B
D
A G E
11
E
C
G
A D B
12
C
c
A Dd B
13
E
D
N
L
M C
A I KH GB
14
E
D
L
M C
H
A I G B
15
C G
A DB

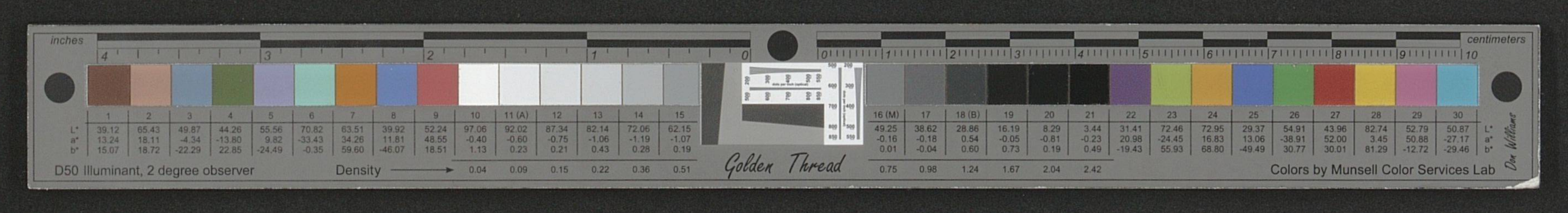

16
A B C
17
A b B c d C
18
A b d B c C
19
A B C
20
A B C
21
A D M N G B C F
22
A D M B C
23
A B C D
24
D B A C F H I G
25
A D B C
26
G A D B C H F
27
A D B C






ELEMENS
DE
MATHEMATIQ





inches
centimeters
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 (A) 12 13 14 15
L* 39.12 65.43 49.87 44.26 55.56 70.82 63.51 39.92 52.24 97.06 92.02 87.34 82.14 72.06 62.15
a* 13.24 18.11 -4.34 -13.80 9.82 -33.43 34.26 11.81 48.55 -0.40 -0.60 -0.75 -1.06 -1.19 -1.07
b* 15.07 18.72 -22.29 22.85 -24.49 -0.35 59.60 -46.07 18.51 1.13 0.23 0.21 0.43 0.28 0.19
D50 Illuminant, 2 degree observer
Density 0.04 0.09 0.15 0.22 0.36 0.51
Golden Thread
16 (M) 17 18 (B) 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
49.25 38.62 28.86 16.19 8.29 3.44 31.41 72.46 72.95 29.37 54.91 43.96 82.74 52.79 50.87 L*
-0.16 -0.18 0.54 -0.05 -0.81 -0.23 20.98 -24.45 16.83 13.06 -38.91 52.00 3.45 50.88 -27.17 a*
0.01 -0.04 0.60 0.73 0.19 0.49 -19.43 55.93 68.80 -49.49 30.77 30.01 81.29 -12.72 -29.46 b*
0.75 0.98 1.24 1.67 2.04 2.42
Colors by Munsell Color Services Lab
Don Williams